

PHYSICS  
LIBRARY  
H 162

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Z A M P

Journal of Applied Mathematics and Physics  
Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baldinger E. Baumann R. Mercier E. Stiefel  
F. Stüssi W. Traupel H. Ziegler  
Redactor: R. Sängler

## INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

CARNEY, CH. L. JR., and GILBERT, R. P.: On the Theory of Hot-Water Drives . . . . .	489
DYER, R. H., and EDMUNDS, D. E.: On the Instability of Taylor and Dean Flows under the Influence of a Circular Magnetic Field. . . . .	497
GUTZWILLER, M. C.: Über die Wirbelstromdämpfung bei ferromagnetischen Schichten . . . . .	508
HÖLDER, E.: Zur Kontinuum-Magneto-Gasdynamik: Stationäre rotationssymmetrische Strömung eines vollkommen leitenden Plasmas. Adolf Busemann zum 60. Geburtstag . . . . .	516
KÖPFER, H.-J.: Über die Grenzwahrscheinlichkeiten einer speziellen homogenen Markoffischen Kette . . . . .	526
LAJAC, E. E.: The Deflection and Buckling of a Beam-Column with a One-Sided Constraint . . . . .	536
SHATNAGAR, P. L., and VERMA, P. D.: On the Steady Flow of a Viscous Fluid Past a Sphere at Small Reynolds Numbers Using Oseen's Approximation . . . . .	546

## Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

DATTA, S. K.: Shear Waves in a Semi-infinite Visco-Elastic Medium due to a Sudden Twist Applied at a Point on the Plane Boundary . . . . .	558
EVAN-IWANOWSKI, R. M.: Mechanical Dislocations and Steady State Processes . . . . .	563
SIEKMANN, J.: Remarks on the Differential Equation $dy/dx = y(y + x + 2)/x(2x - y)$ . . . . .	565
RUTISHAUSER, H.: Ein quadratisch konvergentes Verfahren zur Eigenwertbestimmung bei unsymmetrischen Matrizen I . . . . .	568
ŁYCZKOWSKI, M.: Potenzieren von verallgemeinerten Potenzreihen mit beliebigem Exponent . . . . .	572

## Varia - Miscellaneous - Divers

Eighth National Symposium on Reliability and Quality Control in Washington, D. C., USA . . .	576
UTAM-Symposium über Kreiselprobleme . . . . .	577
Die Erstellung eines internationalen mehrsprachigen Verzeichnisses von Begriffen und Fachwörtern über Rechenanlagen . . . . .	577
Vereinigung Europäischer IBM-1620-Benutzer . . . . .	577
Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques . . . . .	577

ZAMP	Vol. XII	Fasc. 6	Pag. 489—580	25. 11. 61
------	----------	---------	--------------	------------

Birkhäuser Verlag · Basel und Stuttgart

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redaktor/Editor/rédacteur: Prof. Dr. R. Sängler, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmässig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 12 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 8 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurze Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier ausgeführt werden. Autoren von Originalarbeiten, welche einen Umfang von mehr als 12 Druckseiten aufweisen, haben einen *Satzbeitrag* zu entrichten. Dieser beträgt sFr. 30.- pro Seite von der 13. bis 16. Seite, sFr. 42.- pro Seite von der 17. bis 24. Seite, sFr. 54.- pro Seite von der 25. bis 32. Seite und sFr. 66.- pro Seite von der 33. Seite an. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hand of the editor at least 12 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contribution to the periodical should be addressed to the Editor. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 8 weeks before publication of the issue, if the authors dispense with proof-reading. The contributions will be published in English, German, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* should be added a brief summary in a language other than the original one. Drawings and photographs for *illustrations* should be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; lettering on the illustrations should be entered in pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. Authors of *Original Papers* exceeding 12 printed pages are requested to pay a *contribution* of Sw. Frs. 30.- per page for pages 13-16, Sw. Frs. 42.- per page for pages 17-24, Sw. Frs. 54.- per page for pages 25-32, and Sw. Frs. 66.- per page for page 33 and over. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free separate prints without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: trois mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés huit semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langue française, anglaise, allemande ou italienne; cependant, chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. Le légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Pour articles originaux qui dépassent 12 pages imprimées, une *contribution* de frs.s. 30.- par page doit être payée pour les pages 13-16, de frs.s. 42.- par page pour les pages 17-24, de frs.s. 54.- par page pour les pages 25-32, et à partir de page 33 la contribution est de frs.s. 66.- par page. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement, Annual subscription, Abonnement annual:

(6 Nummern, 6 issues, 6 numéros) sFr. 78.- (DM 78.-)

Einzelnnummer, single copy, le numéro, sFr. 16.-

Inserate - Advertisements - Annonces:  $\frac{1}{4}$  Seite/page: sFr./DM 165.-,  $\frac{1}{2}$  Seite/page: sFr./DM 88.-,  $\frac{3}{4}$  Seite/page: sFr./DM 50.-

Alle Rechte, einschliesslich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. - All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction reserved. - Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.



## On the Theory of Hot-Water Drives

By CHARLES L. CARNEY, Jr.<sup>1)</sup> and ROBERT P. GILBERT<sup>2)</sup>,  
Pittsburgh and East Lansing, USA

### 1. Introduction

In this paper we are going to investigate a hot water drive in an oil-bearing rock formation. The hot-water drive is one of several thermal recovery methods [1], [2], [8]<sup>3)</sup> used by the petroleum industry to produce the residual oil in a reservoir. (The essential phenomenon all such methods are based on is that by heating the reservoir the viscosity of the oil is lowered and may be more easily produced.) A disadvantage of this process is that initially cold oil must be displaced, unless of course there is ample stratification or pore-space in the formation for the hot water to flow through.

There have been a number of theoretical hot-water drive studies made previous to this one. Most assume a piston like displacement by the encroaching water; however, they differ on the modes of heat transfer. SCHUMANN [3], KLINKENBERG [4], and WALTER [5] have studied a model in which the heat is transferred by

- (1) convection of hot liquids, and  
(Model A) (2) heat exchange between the solid matrix and liquids which are at different temperatures.

JENKINS and ARONOFKY [6] obtained a solution to the case where heat is transferred by

- (Model B) (1) convection of hot liquids, and  
(2) conduction in the solid matrix.

They also compared both models against experimental data, and concluded that the mechanism involved was in a large part similar to the heat transfer of model *B*; however, in the case of inhomogeneous sands 'field experience would be needed to determine whether model *B* or a combination of both models would sufficiently describe the transfer mechanism'.

In this paper a solution to the combined models (*A* plus *B*) is sought. This is done by performing an iteration on the solution to model *A*; this solution

<sup>1)</sup> Department of Mathematics, University of Pittsburgh, Pittsburgh, Pennsylvania.

<sup>2)</sup> Department of Mathematics, Michigan State University, East Lansing, Michigan.

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to references, page 496.

will be more close to the actual situation than model *A* and in the case of stratified formations should be more accurate than the solution to model *B*. Nevertheless, greater accuracy always may be obtained by continuing the iteration process.

## 2. Mathematical Formulation of the Problem

It would be well to list here the symbols used in the following work.

### *Variables*

- $x$  distance measured from the input well,  
 $t$  time measured from the instance when flooding begins,  
 $T_s$  temperature in the solid,  
 $T_w$  temperature of the water.

### *Constants*

- $v$  velocity at which a piston-type water front moves,  
 $h_w$  heat transfer coefficient from water to solid,  
 $h_s$  heat transfer coefficient from solid to water,  
 $K_s$  conductivity in the solid,  
 $k_s$  diffusivity in the solid  $= K_s/(1-f) P_s c_s$ ,  
 $P_s$  density of solid,  
 $c_s$  heat capacity of solid,  
 $f$  porosity,  
 $T_p$  temperature of input water.

$$y = h_w \frac{x}{v}, \quad z = h_s \left( t - \frac{x}{v} \right), \quad u = e^{y+z} T, \quad \alpha = \frac{h_s v_s^2}{k_s h_w^2}.$$

The partial differential equations for heat transfer by conduction in the solid, convection in the liquid, and a skin-effect between the solid and liquid are:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_w}{\partial t} + v \frac{\partial T_w}{\partial x} &= -h_w (T_w - T_s), \\ \frac{\partial T_s}{\partial t} - k_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} &= h_s (T_w - T_s), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

where

$$k_s = \frac{K}{(1-f) P_s c_s}$$

is the thermal diffusivity of the solid.

In the special case where  $k_s = 0$ , Equation (1) reduce to

and

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_w}{\partial t} + v \frac{\partial T_w}{\partial x} &= -h_w (T_w - T_s) , \\ \frac{\partial T_s}{\partial t} &= h_s (T_w - T_s) . \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$T_w$  and  $T_s$  both satisfy the hyperbolic partial differential equation

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + v \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial x} + h_s v \frac{\partial T}{\partial x} + (h_s + h_w) \frac{\partial T}{\partial t} = 0 , \quad (3)$$

which has the characteristics  $x = \text{constant}$ ,  $t - x/v = \text{constant}$ . Equation (3) may be reduced to normal form by the transformations

and

$$\left. \begin{aligned} y &= h_w \frac{x}{v} , \quad z = h_s \left( t - \frac{x}{v} \right) , \\ u_w &= e^{y+z} T_w , \quad u_s = e^{y+z} T_s ; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Equation (2) then becomes

$$\frac{\partial u_w}{\partial y} = u_s , \quad \frac{\partial u_s}{\partial z} = u_w , \quad (5)$$

which in turn satisfy the standard equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - u = 0 . \quad (6)$$

We may solve this equation readily by means of the Laplace transform method. Transforming with respect to the variable  $z$ , one obtains

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}(y, s) - \bar{u}(y, s) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}(y, 0) = 0 . \quad (7)$$

If one uses the boundary conditions

$$T(y, 0) = \frac{\partial T}{\partial y}(y, 0) = 0$$

at the leading-edge ( $z = 0$ ), and

$$T(0, z) = T_p$$

at the input well ( $y = 0$ ) then Equation (7) has the solution

$$\bar{u}(y, s) = \frac{T_p}{s - 1} e^{y/s} . \quad (8)$$



The inverse transform of  $\bar{u}(y, s)$  is

$$u(y, z) = T_p e^z + T_p e^z \int_0^{2\sqrt{yz}} I_1(\gamma) e^{-\gamma^2/4y} d\gamma, \quad (9)$$

where  $I_1(\gamma)$  is a modified Bessel function of the first kind and first order. Equation (9) may be obtained from the tables [7] by use of a convolution.

Returning to Equation (1) and using the usual transformation to normal form one obtains

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_w}{\partial y} - u_s &= 0, \\ \frac{\partial u_s}{\partial z} - u_w &= \frac{k_s h_w^2}{h_s v^2} \left( \frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u_s}{\partial y} + u_s \right). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

It may be seen that  $u_w$  and  $u_s$  satisfy the partial differential equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - u = \alpha^{-1} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (10)$$

where  $\alpha^{-1} = k_s h_w^2 / h_s v^2$ . This equation may be reduced to an ordinary differential equation in  $y$  by taking the Laplace transform and using the above mentioned boundary conditions. This subsidiary equation then may be written as

$$\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial y^3}(y, s) - 2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}(y, s) + (1 - s \alpha) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}(y, s) + \bar{u}(y, s) = 0. \quad (11)$$

By introducing the change of variables

$$w_1(y) = \bar{u}(y, s), \quad w_2(y) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}(y, s), \quad w_3(y) = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}(y, s). \quad (12)$$

Equation (11) is reduced to the following system of ordinary, linear-differential equations

$$\left. \begin{aligned} w_1' &= f_1(y; w_1, w_2, w_3) = w_2, \\ w_2' &= f_2(y; w_1, w_2, w_3) = w_3, \\ w_3' &= f_3(y; w_1, w_2, w_3) = 2 w_3 + (s \alpha - 1) w_2 - w_1. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

A unique, continuous solution exists for this system equations which passes through the point  $(y^0, w_1^0, w_2^0, w_3^0)$ , if there is a region containing this point in which the  $f_K(y; w_1, w_2, w_3)$  ( $K = 1, 2, 3$ ) are continuous, and the following requirements hold:

$$\left. \begin{aligned} |f_K(y; w_1^*, w_2^*, w_3^*) - f_K(y; w_1, w_2, w_3)| \\ \leq L (|w_1^* - w_1| + |w_2^* - w_2| + |w_3^* - w_3|) \end{aligned} \right\} \quad (13a)$$

where  $L$  is the Lipschitz constant.

$$|f_K(y; w_1, w_2, w_3)| \leq M \quad \text{for} \quad (y, w_1, w_2, w_3) \in R \quad (13b)$$

(that is the  $f_K$  are bounded in this region).

The region  $R$  may be bounded by the inequalities

$$|y - y^0| \leq a, \quad \text{and} \quad |w_K - w_K^0| \leq b_K \leq b. \quad (13c)$$

We notice that these three conditions are obviously satisfied from Equation (13), and proceed to define the functions

$$w_{K,v+1}(y) = w_K^0(y) + \int_{y^0}^y f_{K,v}(y; w_{1,v}, w_{2,v}, w_{3,v}) dy, \quad (14)$$

where  $K = 1, 2, 3$ , and  $v = 1, 2, 3, \dots$ . It follows from the Cauchy-Lipschitz theorem that these successive approximations converge to the solution of our system of equation, and in particular that the function

$$w_1(y) = \bar{u}(y, s) = \lim_{v \rightarrow \infty} w_{1,v}(y) \quad (15)$$

satisfies Equation (11)<sup>4</sup>. We proceed by computing the first iteration to  $w_1(y)$  starting with  $w_1^0(y) = T_p e^{y/s}/(1-s)$ , the solution to Equation (7). Obtaining the first iteration to  $w_1(y)$  from the system of Equation (13) is equivalent to solving

$$(a) \quad w_2'' - 2w_2' + (1 + s\alpha)w_2 = -\frac{e^{y/s}}{s-1}, \quad (16)$$

and

$$w_1 = \int_{y^0}^y w_2 dy. \quad (16a)$$

The solution to the homogeneous equation associated with (16a) is

$$w_2 = A e^{(1+\sqrt{s\alpha})y} + B e^{(1-\sqrt{s\alpha})y}, \quad (17)$$

<sup>4</sup> For  $s$  fixed and real one may visualize a finite  $w-y$  region as contained in a compact subset of a  $w-y$  'plane', hence by the Heine-Borel property it may be covered with a finite number of rectangles. By starting in an initial rectangle and applying the Cauchy-Lipschitz criteria one may then proceed from rectangle to rectangle and obtain a continuous solution  $w_1(y) = u(y, s)$  for all finite values of  $y$ . However, this does not ensure that our limit function  $w_1(y) = \lim_{v \rightarrow \infty} w_{1,v}(y)$  is a Laplace-Transform. For instance, let us consider the sequence of functions  $\{w_{1,v}(y) \equiv \bar{u}_v(y, s)\}_v$  and let us suppose that for finite  $v$  each  $\bar{u}_v(y, s)$  is analytic for  $\text{Re } s > c_v$ , and that consequently an inverse Laplace Transform may be obtained by a Bromwich contour integration. Here, each function  $\bar{u}_v(y, s)$  which corresponds to a finite  $v$ , may be transformed into a function  $U_v(y, z)$ . There is the possibility, however, that the  $\lim_{v \rightarrow \infty} c_v \rightarrow \infty$ ; in this case it is not self-evident that  $\bar{u}(y, s) = \lim_{v \rightarrow \infty} \bar{u}_v(y, s)$  is a Laplace transform, or that it corresponds to the function  $U(y, z) = \lim_{v \rightarrow \infty} U_v(y, z)$ . This question is not discussed in this paper, but will be investigated in a further note.

by variation of parameters the solution to the linear equation may be found, that is

$$w_2(y) = c_1 e^{(1+\sqrt{s}\alpha)y} + c_2 e^{(1-\sqrt{s}\alpha)y} - \frac{T_p e^{1/s+y}}{2s(1-s)}. \quad (18)$$

The constants  $c_1, c_2$  are determined from the boundary conditions, at the leading-edge ( $w_2 = 0, y = h_w t$ ) and the input-well

$$(w_1 = w_2 = \frac{T_p}{s-1}, \quad y = 0),$$

to be

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{T_p [2s\alpha e^{-\sqrt{s}\alpha h_w t} + e^{1/s} (1 - e^{-\sqrt{s}\alpha h_w t})]}{4s\alpha(1-s) \sinh(\sqrt{s}\alpha h_w t)}, \\ c_2 &= \frac{-T_p [2s\alpha e^{\sqrt{s}\alpha h_w t} + e^{1/s} (1 - e^{-\sqrt{s}\alpha h_w t})]}{4s\alpha(1-s) \sinh(\sqrt{s}\alpha h_w t)}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= e^{y+z} \left( T + \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cong e^z T_p \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

at  $y = 0$ , for  $z \gg 1$ .

By rearranging terms in (18) and (19) one has

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}(y, s) = w_2(y) &= -T_p e^y \left[ \frac{\sinh[(y - h_w t) \sqrt{\alpha} s^{1/2}]}{2(s-1) \sinh[h_w t \sqrt{\alpha} s^{1/2}]} \right. \\ &\quad \left. + e^{1/2} \frac{\cosh[(y - h_w t) \sqrt{\alpha} s^{1/2}]}{2s\alpha(s-1) \cosh \frac{h_w t \sqrt{\alpha} s^{1/2}}{2}} \right] + \frac{T_p e^{1/2+y}}{2s\alpha(s-1)}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

The inverse Laplace transform may be found by use of the tables [7] and the convolution theorem; one obtains

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}(y, z) &= T_p e^{y+z} \left[ \frac{k_s h_w^2}{2 h_s v^2} \int_0^z e^{-\zeta} I_0(2\zeta^{1/2}) d\zeta \right. \\ &\quad - \frac{1}{v t} \sqrt{\frac{k_s}{h_s}} \int_0^z \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \theta_4 \left( \frac{\xi}{2vt} \sqrt{\frac{k_s}{h_s}} \mid \frac{i\pi \zeta k_s}{h_s(vt)^2} \right) \right\}_{\xi=\xi_0} e^{-\zeta} d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{h_w^2 v^3 t} \left( \frac{k_s}{h_s} \right)^{3/2} \int_0^z \int_0^{\zeta} e^{-\zeta} I_0(2\eta^{1/2}) \\ &\quad \times \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \theta_1 \left( \frac{\xi}{vt} \sqrt{\frac{k_s}{h_s}} \mid \frac{4\pi i k_s (\zeta - \eta)}{(vt)^2 h_s} \right) \right\}_{\xi=\xi_1} d\eta d\zeta \right] \end{aligned} \right\} \quad (21)$$



$$\xi_0 = \sqrt{\frac{h_s}{h_s}} \frac{v}{h_w} (y - h_w t), \quad \xi_1 = \frac{h_s}{h_s} \frac{v}{h_w} \left( y - \frac{h_w t}{2} \right)$$

where

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(v | \tau) &= (-i \tau)^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-)^n e^{-\pi(v-1/2+n)^2/\tau}, \\ \theta_4(v | \tau) &= \theta_0(v | \tau) = (-i \tau)^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i\pi(v-1/2+n)^2/\tau} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

are theta functions. We recall that  $y, z$  are the independent variables and  $t$  appears just as a parameter because of the boundary conditions, hence one may write

$$\left. \begin{aligned} u(y, z) &= f(z) + T_p e^{y+z} \left[ \frac{h_s h_w^2}{2 h_s v^2} \int_0^z e^{-\zeta} I_0(2 \zeta^{1/2}) d\zeta \right. \\ &\quad - \frac{h_s}{v^2 t h_s} \int_0^z \theta_4 \left( \frac{y - h_w t}{2 h_w t} \middle| \frac{i \pi \zeta h_s}{h_s (v t)^2} \right) e^{-\zeta} d\zeta \\ &\quad + \frac{h_s^2}{h_w v^4 t h_s} \int_0^z \int_0^{\zeta} e^{-\zeta} I_0(2 \eta^{1/2}) \theta_1 \left( \frac{y - h_w t/2}{h_w t} \middle| \frac{4 \pi i h_s (\zeta - \eta)}{h_s (v t)^2} \right) d\eta d\zeta \\ &\quad + \frac{T_p e^z h_s}{v^2 t h_s} \int_{y_0}^y \int_0^z e^{(\eta - \zeta)} \theta_4 \left( \frac{-h_w t}{2 h_w t} \middle| \frac{i \pi \zeta h_s}{h_s (v t)^2} \right) d\zeta d\eta \\ &\quad - \frac{T_p h_s^2}{h_w v^4 t h_s} \int_{y_0}^y \int_0^z \int_0^{\zeta} e^{(\xi - \zeta)} I_0(2 \eta^{1/2}) \\ &\quad \quad \times \theta_1 \left( \frac{\xi - h_w t/2}{h_w t} \middle| \frac{4 \pi i h_s (\zeta - \eta)}{h_s (v t)^2} \right) d\eta d\zeta d\xi \left. \right] \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

where  $f(z)$  must be determined by the  $y$  boundary conditions. The two solutions  $u_s(y, z)$  and  $u_w(y, z)$  may be distinguished at this point by using the conditions

$$u_w(0, z) = T_w(0, z) e^z = T_p e^z \quad (y_0 = 0),$$

and

$$u_s(h_w t, z) = T_s(h_w t, z) e^{z+h_w t} = 0 \quad (y_0 = h_w t). \quad (24)$$

By choosing  $y_0$  differently in each case,  $f_s(z)$  and  $f_w(z)$  may be calculated from

the equations

$$f_w(z) = e^z T_p - e^z T_p \left[ \frac{k_s h_w^2}{2 h_s v^2} \int_0^z e^{-\zeta} I_0(2 \zeta^{1/2}) d\zeta \right. \\ \left. - \frac{k_s}{v^2 t h_s} \int_0^z \theta_4 \left( -\frac{1}{2} \left| \frac{i \pi \zeta k_s}{h_s (v t)^2} \right| \right) e^{-\zeta} d\zeta + \frac{k_s^2}{h_w v^4 t h_s} \int_0^z \int_0^\zeta e^{-\zeta} I_0(2 \eta^{1/2}) \right. \\ \left. \times \theta_1 \left( -\frac{1}{2} \left| \frac{4 \pi i k_s (\zeta - \eta)}{h_s (v t)^2} \right| \right) d\eta d\zeta \right] \quad (25)$$

and

$$f_s(z) = -T_p e^{z+h_w t} \left[ \frac{k_s h_w^2}{2 h_s v^2} \int_0^z e^{-\zeta} I_0(2 \zeta^{1/2}) d\zeta \right. \\ \left. - \frac{k_s}{v^2 t h_s} \int_0^z \theta_4 \left( 0 \left| \frac{i \pi \zeta k_s}{h_s (v t)^2} \right| \right) e^{-\zeta} d\zeta + \frac{k_s^2}{h_w v^4 t h_s} \int_0^z \int_0^\zeta e^{-\zeta} I_0(2 \eta^{1/2}) \right. \\ \left. \times \theta_1 \left( \frac{1}{2} \left| \frac{4 \pi i k_s (\zeta - \eta)}{h_s (v t)^2} \right| \right) d\eta d\zeta \right]. \quad (25b)$$

Equations (21) and (25) represent a first approximation to a solution for the hot-water drive problem.

## BIBLIOGRAPHY

- [1] A. SCHILD, *A Theory for the Effect of Heating Oil Producing Wells*, J. Petrol. Tech. (January 1957).
- [2] P. COOPERMAN, *Some Criteria for the In Situ Combustion of Crude Oil*, J. appl. Phys. (September 1959).
- [3] T. E. W. SCHUMANN, *Heat Transfer: A Liquid Flowing Through a Porous Prism*, J. Franklin Inst., 203, 405-416 (1929).
- [4] A. KLINGENBERG, *Numerical Evaluation of Equations Describing Transient Heat and Mass Transfer in Packed Solids*, Ind. Eng. Chem., 40 1992-1994 (1948).
- [5] J. E. WALTER, *Rate-Dependent Chromatographic Adsorption*, J. Chem. Phys., 13, 8, 332-336 (1945).
- [6] R. JENKINS and J. S. ARONOFKY, *Analysis of Heat Transfer Processes in Porous Media New Concepts in Reservoir Heat Engineering*, 18th Technical Conference on Petroleum Production, Pennsylvania State University (October 6-8, 1954).
- [7] A. ERDELYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER, and F. G. TRICOMI, *Tables of Integral Transforms*, Bateman Manuscript Project, vol. 1 (McGraw-Hill, 1954).
- [8] R. P. GILBERT, *Reverse in situ Combustion*, J. appl. Math. Phys. (ZAMP), Vol. X, Fasc. 6 (1959).

(Received: July 7, 1961.)

# On the Instability of Taylor and Dean Flows under the Influence of a Circular Magnetic Field

By ROBERT H. DYER and DAVID E. EDMUNDS, Cardiff, Wales<sup>1)</sup>

## 1. Introduction

In a recent paper, YIH [1]<sup>2)</sup> has shown that ring vortices may be produced in a stationary fluid confined between two concentric circular cylinders when an electric current of suitable constant density passes axially through the fluid, and a line current passes along the axis of the cylinders. The instability is brought about by the centripetal electromagnetic body force. Cases for which the production of similar vortices is of a dynamical character are, of course, well known (cf. TAYLOR [2], DEAN [3]). In [1] sufficient conditions for stability are obtained by integral methods similar to those of SYNGE [4], and detailed results are given when the spacing between the cylinders is small compared with the radii.

In this note an extension of YIH's work is made to consider the problems arising when the undisturbed fluid is not stationary but has a basic velocity around the cylinders. This may be achieved either by rotation of the cylinders or by the application of a pressure gradient round the cylinders. In such problems two sources of instability are present, and a discussion of their joint effect is given here. YIH in his paper notes that a simple experiment to demonstrate the phenomenon does not appear possible owing to the great magnitude of the current that would be required. The position is slightly better with regard to the present work in that we should require only a current large enough to produce instability at a TAYLOR number perceptibly different from the usual non-magnetic one. Unfortunately this current would still be formidably big, if mercury were used as the fluid.

## 2. The equations of the problem

We shall consider the motion of a viscous, incompressible, electrically conducting fluid in the space between two infinitely long coaxial circular cylinders, whose equations are  $r = R_1$ ,  $r = R_2$  ( $R_2 > R_1$ ) referred to a system of cylindrical polar coordinates  $(r, \theta, z)$ . The equations governing the motion

<sup>1)</sup> Department of Mathematics, University College, Cardiff, Wales.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to the references, p. 507.



of such a fluid are, in component form

$$\varrho \left( \frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\theta^2}{r} \right) = - \frac{\partial \chi}{\partial r} + \varrho v \left( V^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\mu}{4\pi} \left( \frac{\mathfrak{D}H_r}{\mathfrak{D}t} - \frac{H_\theta^2}{r} \right), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \varrho \left( \frac{Du_\theta}{Dt} + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) = & - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \varrho v \left( V^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\ & + \frac{\mu}{4\pi} \left( \frac{\mathfrak{D}H_\theta}{\mathfrak{D}t} + \frac{H_r H_\theta}{r} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varrho \frac{Du_z}{Dt} = - \frac{\partial \chi}{\partial z} + \varrho v V^2 u_z + \frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathfrak{D}H_z}{\mathfrak{D}t}, \quad (3)$$

$$\frac{DH_r}{Dt} = \frac{\mathfrak{D}u_r}{\mathfrak{D}t} + \eta \left( V^2 H_r - \frac{H_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial H_\theta}{\partial \theta} \right), \quad (4)$$

$$\frac{DH_\theta}{Dt} + \frac{u_\theta H_r}{r} = \frac{\mathfrak{D}u_\theta}{\mathfrak{D}t} + \frac{H_\theta u_r}{r} + \eta \left( V^2 H_\theta - \frac{H_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right), \quad (5)$$

$$\frac{DH_z}{Dt} = \frac{\mathfrak{D}u_z}{\mathfrak{D}t} + \eta V^2 H_z, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{H_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

where

$$\chi = p + \frac{\mu}{8\pi} |\mathbf{H}|^2 + \varrho \Omega,$$

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}t} \equiv H_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{H_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + H_z \frac{\partial}{\partial z},$$

$$V^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

and

$$\eta = (4\pi\mu\sigma_0)^{-1}.$$

In these equations,  $t$  is the time,  $\varrho$  the density,  $\mu$  the permeability,  $v$  the kinematic viscosity,  $\sigma_0$  the conductivity, and  $\Omega$  the gravitational potential per unit mass;  $u_r, u_\theta, u_z$  are the components of the velocity  $\mathbf{u}$  and  $H_r, H_\theta, H_z$  are the components of the magnetic field  $\mathbf{H}$  in the radial, transverse and  $z$ -directions respectively. The current density  $\mathbf{j}$  is such that

$$\mathbf{j} = \sigma_0 (\mathbf{E} + \mu \mathbf{u} \times \mathbf{H}), \quad \text{curl } \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}. \quad (9)$$

$\mathbf{E}$  being the electric field.

It is easy to verify that equations (1) to (9) have the following two stationary solutions:

$$(a) \quad u_r = u_z = 0, \quad u_\theta = V = a_1 r + b_1 r^{-1}, \quad (10)$$

$$H_r = H_z = 0, \quad H_\theta = H = 2\pi \left( \frac{J'}{\pi r} + j_0 r \right) \quad (11)$$

where

$$a_1 = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad b_1 = \frac{-(\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2},$$

and

$$J' = J - \pi R_1^2 j_0.$$

The velocity field is produced by rotating the inner and outer cylinders with angular velocities  $\Omega_1, \Omega_2$  respectively; the magnetic field is the result of passing a current  $J$  along the centre line of the cylinders, i.e. the  $z$ -axis ( $J$  is taken as positive if it is in the positive  $z$ -direction), and a constant current of density  $j_0$  between the cylinders in the  $z$ -direction. There is no interaction between the velocity and magnetic fields.

$$(b) \quad u_r = u_z = 0, \quad u_\theta = V = K \left[ C \left( \frac{r}{R_2} - \frac{R_2}{r} \right) + \frac{r}{R_2} \log \frac{r}{R_2} \right] \quad (12)$$

where

$$C = - \left( \frac{R_2^2}{R_1^2} - 1 \right)^{-1} \log \frac{R_2}{R_1}, \quad K = \frac{R_2}{2\nu\varrho} \frac{\partial p}{\partial \theta}.$$

The magnetic field is taken to be as in (a), while the velocity field is generated by a constant pressure gradient in the  $\theta$ -direction.

The stability of these two types of flow will now be investigated, and the two problems thus arising will be referred to in what follows as the TAYLOR problem and the DEAN problem respectively, because of the analogies with the work of TAYLOR and DEAN in the absence of a magnetic field. We shall establish the basic stability equations without actually specifying  $V$ , so that up to this point the work will apply to both problems.

Let the stationary flow given by (11) and either (10) or (12) be slightly perturbed, so that the components of the velocity and of the magnetic field of the disturbed motion are

$$v_r, V + v_\theta, v_z; \quad h_r, H + h_\theta, h_z, \quad (13)$$

respectively. The perturbation in the magnetohydrodynamic pressure  $\chi$  will be denoted by  $\chi'$ . Assuming that the disturbance is independent of  $\theta$ , we find on substituting (13) into equations (1) to (6) and linearising:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = 2V v_\theta - \frac{\mu H}{2\pi\varrho r} h_\theta - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \chi'}{\partial r} + \nu \left( \nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v_r, \quad (14)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = -v_r \left( \frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right) + \frac{\mu}{4\pi\varrho} h_r \left( \frac{dH}{dr} + \frac{H}{r} \right) + v \left( V^2 - \frac{1}{r^2} \right) v_\theta, \quad (15)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \chi'}{\partial z} + v V^2 v_z, \quad (16)$$

$$\frac{\partial h_r}{\partial t} = \eta \left( V^2 - \frac{1}{r^2} \right) h_r, \quad (17)$$

$$\frac{\partial h_\theta}{\partial t} = h_r \frac{dV}{dr} - v_r \frac{dH}{dr} + \frac{1}{r} (H v_r - V h_r) + \eta \left( V^2 - \frac{1}{r^2} \right) h_\theta, \quad (18)$$

$$\frac{\partial h_z}{\partial t} = \eta V^2 h_z, \quad (19)$$

where now

$$V^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

The form of equations (17) and (19) leads us to take both  $h_r$  and  $h_z$  to be zero functions. Equation (7) enables a stream function  $\psi_1$  to be introduced, so that

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r \psi_1), \quad v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \psi_1),$$

and we specify the type of perturbation to be considered by writing

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -i \hat{\psi}(r) \exp(\sigma t + i \lambda z), \quad v_\theta = \hat{v}(r) \exp(\sigma t + i \lambda z), \\ h_\theta &= \hat{h}(r) \exp(\sigma t + i \lambda z). \end{aligned}$$

Elimination of  $\chi'$  between (14) and (16) then gives

$$\left( L - \lambda^2 - \frac{\sigma}{v} \right) (L - \lambda^2) \hat{\psi} = -\frac{2\lambda}{vr} \left[ V \hat{v} - \frac{\mu H}{4\pi\varrho} \hat{h} \right], \quad (20)$$

while (15) and (18) become

$$v \left( L - \lambda^2 - \frac{\sigma}{v} \right) \hat{v} = -\lambda \hat{\psi} \left( \frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right), \quad (21)$$

$$\eta \left( L - \lambda^2 - \frac{\sigma}{\eta} \right) \hat{h} = -\lambda \hat{\psi} \left( \frac{dH}{dr} - \frac{H}{r} \right), \quad (22)$$

where

$$L \equiv \frac{d}{dr} \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right).$$

The velocity boundary conditions are provided by the usual no slip requirement, and are

$$\hat{v} = \hat{\psi} = \frac{d\hat{\psi}}{dr} = 0 \quad \text{at } r = R_1, \quad r = R_2. \quad (23)$$

If we suppose that the material of which the cylinders are made is an insulator, then  $\hat{j}_r = 0$  on the walls. Taken together with (9) this gives the magnetic



boundary condition as

$$\hat{h} = 0 \quad \text{at} \quad r = R_1, \quad r = R_2. \quad (24)$$

Our problem is thus to solve equations (20), (21), (22) subject to the boundary conditions (23) and (24).

### 3. The Taylor problem

Here the basic velocity field is specified by (10). Defining dimensionless quantities

$$r' = \frac{r}{R_1}, \quad k = R_1 \lambda, \quad \sigma' = \frac{\sigma R_1^2}{\nu},$$

$$v = \frac{\hat{v} R_1}{\nu k A}, \quad h = \frac{\hat{h}}{j_0 R_1}, \quad \psi = \frac{\hat{\psi}}{k A \nu}$$

and then dropping the primes on  $r'$  and  $\sigma'$ , we find that (20), (21), and (22) become

$$(L - k^2 - \sigma) (L - k^2) \psi = -2k \left( a + \frac{b}{r^2} \right) v + \left( 1 + \frac{B}{r^2} \right) h, \quad (25)$$

$$(L - k^2 - \sigma) v = -2ak\psi, \quad (26)$$

$$\left( L - k^2 - \frac{\sigma \nu}{\eta} \right) h = \frac{N k^2}{r^2} \psi, \quad (27)$$

where

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{R(\beta \alpha^2 - 1)}{\alpha^2 - 1}, & b &= -\frac{R \alpha^2 (\beta - 1)}{\alpha^2 - 1}, \\ R &= \frac{\Omega_1 R_1^2}{\nu}, & \beta &= \frac{\Omega_2}{\Omega_1}, & \alpha &= \frac{R_2}{R_1}, \\ A &= \frac{\mu j_0^2 R_1^4}{\varrho \nu^2}, & B &= \frac{J'}{\pi j_0 R_1^2}, & N &= \frac{4 \pi \nu A B}{\eta}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Proceeding exactly as in [1] and [4] it is possible to obtain from (25) to (27) the relation

$$k^2 N (I_2 + 2k^2 I_1 + k^4 I_0 + J_0 + k^2 J_1) + H_0 + k^2 H_1$$

$$+ \sigma_r \left\{ k^2 N (k^2 I_0 + I_1 + J_1) + \frac{\nu}{\eta} H_1 \right\} = 0$$

in which

$$I_0 = \int_1^\alpha r |\psi|^2 dr, \quad I_1 = \int_1^\alpha \frac{1}{r} \left| \frac{d}{dr} (r\psi) \right|^2 dr, \quad I_2 = \int_1^\alpha r |L\psi|^2 dr,$$

$$J_0 = \int_1^\alpha r^3 \left( 1 + \frac{b}{a r^2} \right) \left| \frac{d}{dr} \left( \frac{v}{r} \right) \right|^2 dr, \quad J_1 = \int_1^\alpha r \left( 1 + \frac{b}{a r^2} \right) |v|^2 dr,$$

$$H_0 = \int_1^\infty r \left(1 + \frac{B}{r^2}\right) \left| \frac{d}{dr}(r h) \right|^2 dr, \quad H_1 = \int_1^\infty r^3 \left(1 + \frac{B}{r^2}\right) |h|^2 dr$$

and  $\sigma_r$  is the real part of  $\sigma$ . All we can deduce from this, however, is that the motion is stable if both

$$(i) \quad \Omega_2 R_2^2 > \Omega_1 R_1^2 > 0,$$

and

$$(ii) \quad J \geq \pi j_0 R_1^2 \quad \text{or} \quad J \leq -\pi j_0 (R_2^2 - R_1^2)$$

hold, i.e. if both the Yih and Sygne conditions hold.

We now turn to the solution of equations (25) to (27). These are too difficult to solve as they stand, but when the spacing  $d = R_2 - R_1$  between the cylinders is small compared with the radii the problem simplifies. If the cylinders are rotating in the same direction we may approximate  $a + b/r^2 = \omega$  in (25) by some suitable value  $\bar{\omega}$  such as

$$\bar{\omega} = a + \frac{b}{r_0^2}, \quad r_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

and similarly if the two applied currents are in the same direction, i.e. if  $-B < 1$ , then the quantities  $1 + B/r^2$  and  $1/r^2$  occurring in (25) and (27) respectively may be approximated by  $1 + B/r_0^2$  and  $1/r_0^2$ . Defining new dimensionless parameters

$$\xi = \frac{R_1}{d} (r - 1), \quad m = k \frac{d}{R_1}, \quad \sigma_1 = \sigma \left(\frac{d}{R_1}\right)^2$$

and neglecting terms of order  $d/R_1$ , equations (25) to (27) become, under the above approximations, and with  $D \equiv d/d\xi$ ,

$$(D^2 - m^2 - \sigma_1) (D^2 - m^2) \psi = \left(\frac{d}{R_1}\right)^4 \left[ -2m \left(\frac{R_1}{d}\right) \bar{\omega} v + \left(1 + \frac{B}{r_0^2}\right) h \right],$$

$$(D^2 - m^2 - \sigma_1) v = -2am \left(\frac{d}{R_1}\right) \psi,$$

$$(D^2 - m^2 - \sigma_1 r/\eta) h = \frac{N m^2 \psi}{r_0^2}.$$

Assuming the principle of exchange of stabilities, we thus find that

$$(D^2 - m^2)^3 \psi = -m^2 (T + Q) \psi$$

where  $T = -4\bar{\omega}a(d/R_1)^4$  is the Taylor parameter, and

$$Q = -\frac{(1 + B/r_0^2)N(d/R_1)^4}{r_0^2}.$$

The boundary conditions are

$$\psi = D\psi = (D^2 - m^2)^2 \psi = 0 \quad \text{at} \quad \xi = 0, 1,$$

and so the problem is equivalent to that of PELLEW and SOUTHWELL [5]. Using their solution it follows that instability will first set in when

$$T + Q = 1707 \cdot 8.$$

Hence the sign of  $Q$  determines whether the magnetic field stabilises or destabilises the flow.

In [1] it is shown that to produce vortices in mercury at rest between two cylinders with

$$B = -\frac{1}{2}, \quad d = 1 \text{ cm}, \quad R_1 = 10 \text{ cm}$$

the total current through the annular space would have to be  $1.62 \times 10^5$  amp. Our result shows that to depress the critical TAYLOR number  $T$  to a value 50 below its non-magnetic value, the total annular current required would be roughly one sixth of the current mentioned above. Thus for the predicted effect to be detectable a very large current would still be required, if mercury were the fluid used. As pointed out by YIH, this current would be greatly reduced if it were possible to replace mercury by a highly ionised gas with small density and high conductivity.

#### 4. The Dean problem

Here we have to solve equations (20) to (22) with the basic velocity field defined by (12). As in § 3 we shall consider only the case where

$$d = R_2 - R_1 \ll \frac{1}{2} (R_1 + R_2)$$

and then we have approximately

$$V = \frac{3}{2} V_m (1 - 4x^2)$$

with

$$x = \frac{r - R_1}{d} - \frac{1}{2}, \quad V_m = -\frac{d^2}{12 \varrho \nu R_1} \frac{\partial p}{\partial \theta}.$$

Writing

$$\hat{v} = V_m v, \quad \lambda = \frac{m}{d}, \quad \hat{\psi} = \frac{\nu}{6m} \psi, \quad \hat{h} = -\frac{2\pi B \nu}{3\eta} j_0 d h$$

and neglecting terms of order  $d/R_1$ , we find that the perturbation equations become (assuming the principle of exchange of stabilities)

$$(D^2 - m^2)^2 \psi = m^2 T (1 - 4x^2) v - m^2 T_1 h, \quad (29)$$

$$(D^2 - m^2) v = -2x\psi, \quad (30)$$

$$(D^2 - m^2) h = \psi, \quad (31)$$



where  $B$  and  $N$  are defined in (28), and

$$T = -\frac{18 R^2 d}{R_1}, \quad R = \frac{V_m d}{v}, \quad T_1 = -N(1+B) \left( \frac{d}{R_1} \right)^4, \quad D \equiv \frac{d}{dx}.$$

The boundary conditions are

$$\psi = D\psi = (D^2 - m^2)^2 \psi = 0 \quad \text{at} \quad x = \pm 1/2.$$

Equations (29)–(31) are now solved using the method of REID [6]. We assume that  $\psi$  can be expressed in the form

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n C_n(x) + B_n S_n(x)] \quad (32)$$

in which

$$C_n(x) = \frac{\cosh \lambda_n x}{\cosh \lambda_n/2} - \frac{\cos \lambda_n x}{\cos \lambda_n/2}, \quad S_n(x) = \frac{\sinh \mu_n x}{\sinh \mu_n/2} - \frac{\sin \mu_n x}{\sin \mu_n/2}$$

where  $\lambda_n$  and  $\mu_n$  are the positive roots of the equations

$$\tanh \frac{1}{2} \lambda + \tan \frac{1}{2} \lambda = 0, \quad \coth \frac{1}{2} \mu - \cot \frac{1}{2} \mu = 0.$$

The functions  $C_n$  and  $S_n$  of course satisfy the boundary conditions on  $\psi$ . Substituting (32) in (30) and (31) we find solutions of the resulting equations for  $v$  and  $h$  which satisfy the boundary conditions. If we substitute these expressions for  $v$  and  $h$ , together with (32), into (29), and multiply the resulting expression in turn by  $C_n(x)$  and  $S_n(x)$  and then integrate between  $x = -1/2$  and  $x = 1/2$ , we obtain the following system of equations for the  $A_n$  and the  $B_n$ :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{m^2 T} A_n A_{nq} - B_n D_{nq} \right) &= 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n C_{nq} - \frac{1}{m^2 T} B_n B_{nq} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (q = 1, 2, \dots) \quad (33)$$

where

$$\begin{aligned} A_{nq} &= (\lambda_n^4 + m^4) \delta_{nq} - 2m^2 X_{nq} + m^2 T_1 \left[ f_n P_q(m) + \frac{1}{\lambda_n^4 - m^4} (m^2 \delta_{nq} + X_{nq}) \right], \\ B_{nq} &= (\mu_n^4 + m^4) \delta_{nq} - 2m^2 Y_{nq} + m^2 T_1 \left[ g_n Q_q(m) + \frac{1}{\mu_n^4 - m^4} (m^2 \delta_{nq} + Y_{nq}) \right], \\ C_{nq} &= a_n V_q(m) - \frac{2}{\lambda_n^4 - m^4} (m^2 I_0 + I_2) + \frac{4}{(\lambda_n^4 - m^4)^2} [(\lambda_n^4 + m^4) I_1 + 2m^2 I_3], \\ D_{nq} &= b_n U_q(m) - \frac{2}{\mu_n^4 - m^4} (m^2 J_0 + J_2) + \frac{4}{(\mu_n^4 - m^4)^2} [(\mu_n^4 + m^4) J_1 + 2m^2 J_3], \\ a_n &= \frac{2\lambda_n^2}{\lambda_n^4 - m^4} - \frac{16m^2 \lambda_n^3 \tanh 1/2 \lambda_n}{(\lambda_n^4 - m^4)^2}, \quad b_n = \frac{2\mu_n^2}{\mu_n^4 - m^4} - \frac{16m^2 \mu_n^3 \coth 1/2 \mu_n}{(\mu_n^4 - m^4)^2}, \end{aligned}$$

and

$$f_n = \frac{-2\lambda_n^2}{\lambda_n^4 - m^4}, \quad g_n = \frac{-2\mu_n^2}{\mu_n^4 - m^4},$$

$$P_q(m) = \int_{-1/2}^{1/2} \cosh mx \operatorname{sech} \frac{m}{2} C_q(x) dx,$$

$$Q_q(m) = \int_{-1/2}^{1/2} \sinh mx \operatorname{cosech} \frac{m}{2} S_q(x) dx,$$

$$U_q(m) = \int_{-1/2}^{1/2} (1 - 4x^2) \cosh mx \operatorname{sech} \frac{m}{2} C_q(x) dx,$$

$$V_q(m) = \int_{-1/2}^{1/2} (1 - 4x^2) \sinh mx \operatorname{cosech} \frac{m}{2} S_q(x) dx.$$

The quantities  $X_{nq}$ ,  $Y_{nq}$ ,  $I_0$ , ...,  $I_3$ ,  $J_0$ , ...,  $J_3$  which occur in the above expressions are constants whose numerical value is given in [6];  $\delta_{nq}$  is the Kronecker delta.

For (33) to have a non-trivial solution, the determinant of the system must vanish; this provides a relation between  $T$ ,  $m$  and  $T_1$  from which information about the onset of instability can be obtained. We shall approximate this infinite determinant by one of second order, which corresponds to expressing  $\psi$  as a linear combination of  $C_1(x)$  and  $S_1(x)$  only. The corresponding determinantal equation is then

$$m^4 T^2 = \frac{A_{11} B_{11}}{C_{11} D_{11}}. \quad (34)$$

By specifying  $T_1$  it is possible to find from (34) the relationship between  $T$  and  $m$ , and hence that between  $R(d/R_1)^{1/2}$  and  $m$ ; moreover, we can find the minimum value of  $R(d/R_1)^{1/2}$  ( $= R_{\text{crit}}(d/R_1)^{1/2}$ ) and the corresponding  $m$  ( $= m_{\text{crit}}$ ). These results are shown in Table 1 and Figure 1. Table 1 also contains values

Table 1  
Critical values of  $R(d/R_1)^{1/2}$

$T_1$	$m$	$R(d/R_1)^{1/2}$	$B_1$
0	3.89	36.322	0.2671
200	3.83	35.211	0.2507
400	3.77	33.995	0.2330
600	3.71	32.643	0.2137
800	3.64	31.105	0.1923
1000	3.54	29.299	0.1615
1200	3.45	27.066	0.1407
1400	3.33	24.038	0.1077
-500	3.99	38.769	0.3029
-1000	4.07	40.888	0.3331

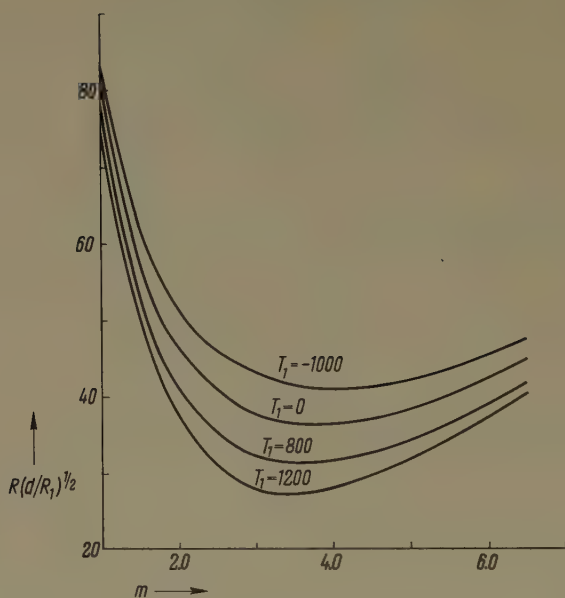


Figure 1  
Curves of neutral stability.

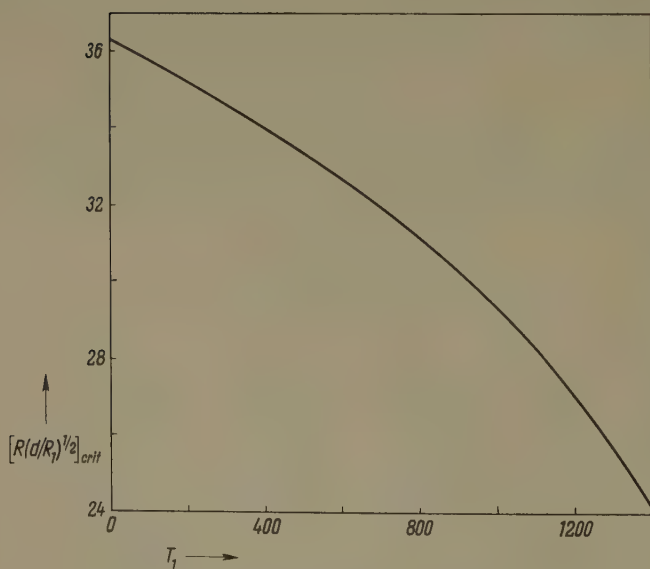


Figure 2  
The variation of  $[R(d/R_1)^{1/2}]_{crit}$  with  $T_1$ .



of  $B_1$  (choosing  $A_1 = 1$ ) at the critical points, and from these the streamlines and velocity profile at the onset of instability can be determined.

Figure 2 illustrates the variation of  $R_{\text{crit}}(d/R_1)^{1/2}$  with  $T_1$  for  $T_1 > 0$ .

The results obtained show that when  $T_1$  increases there is a decrease in both  $R_{\text{crit}}(d/R_1)^{1/2}$  and  $m_{\text{crit}}$ . Results have not been obtained near  $T_1 = 1707.8$ , at which value instability should set in with zero basic fluid velocity. This is because when  $V_m = 0$  the stability equations are of such a nature that effectively  $\psi$  is then being approximated by only one function. However, for the values of  $T_1$  given in Table 1 it appears that the present approximation is quite adequate. The work might be extended to consider the effect of slight curvature of the walls on the stability of flow in a parallel plane channel under the influence of a magnetic field parallel to the planes.

### 5. Acknowledgement

One of us (R. H. D.) is indebted to the Department of Scientific and Industrial Research for a maintenance grant.

### REFERENCES

- [1] C.-S. YIH, *Ring Vortices Generated Electromagnetically*. J. Fluid Mech. 5, 436 (1959).
- [2] G. I. TAYLOR, *Stability of a Viscous Liquid Contained between two Rotating Cylinders*. Phil. Trans. A, 223, 289 (1923).
- [3] W. R. DEAN, *Fluid Motion in a Curved Channel*. Proc. Roy. Soc. A, 121, 402 (1928).
- [4] J. L. SYNGE, *On the Stability of a Viscous Liquid between two Rotating Coaxial Cylinders*, Proc. Roy. Soc. A, 167, 250 (1938).
- [5] A. PELLEW and R. V. SOUTHWELL, *On Maintained Convective Motion in a Fluid Heated from below*. Proc. Roy. Soc. A, 176, 312 (1940).
- [6] W. H. REID, *On the Stability of Viscous Flow in a Curved Channel*. Proc. Roy. Soc. A, 244, 186 (1958).

### Résumé

On discute l'influence d'un champ magnétique circulaire sur la stabilité d'un fluide visqueux et conducteur de l'électricité en mouvement entre deux cylindres circulaires coaxiaux. Supposant que l'espacement entre les cylindres est petit par rapport à leurs rayons, on donne des résultats sur deux sortes de mouvement du fluide basique, produites par la rotation des cylindres et par un gradient de pression autour des cylindres. On démontre que le champ magnétique peut avancer ou retarder l'accrochage de l'instabilité, suivant les circonstances.

(Received: January 15, 1961.)

## Über die Wirbelstromdämpfung bei ferromagnetischen Schichten

Von MARTIN C. GUTZWILLER, Zürich<sup>1)</sup>

In der nachfolgenden Rechnung soll die Entstehung und die Wirkung von Wirbelströmen in einer einfachen Leiteranordnung untersucht werden. Die Situation kann in einem kartesischen Koordinatensystem  $(x, y, z)$  wie folgt beschrieben werden:

In dem Zylinder

$$x^2 + y^2 \leq R^2, \quad |z| \leq \frac{D}{2} \quad (1)$$

befindet sich ferromagnetisches Material, dessen Magnetisierung  $(M_x, M_y, M_z)$  als homogen angenommen ist und in bekannter Weise mit der Zeit  $t > 0$  variiert, während für  $t < 0$  die Magnetisierung nicht variiert. Über und unter diesem ferromagnetischen Körper befinden sich unendlich ausgedehnte leitende Platten, deren Position gegeben ist durch

$$\frac{D}{2} \leq a \leq |z| \leq b \quad (2)$$

und deren spezifischer Widerstand  $\rho$  ist. Es seien die in den leitenden Platten induzierten Wirbelströme und die von diesen Wirbelströmen erzeugten magnetischen Felder innerhalb des ferromagnetischen Zylinders gesucht.

Die Methode der Lösung lässt sich sofort auf Anordnungen der Leiter anwenden, welche in komplizierterer Weise von der  $z$ -Koordinate abhängen. Dies würde zu verwickelteren algebraischen Ausdrücken führen. Aber die Ergebnisse wären im wesentlichen dieselben, insbesondere in dem wichtigen Fall, wo die vertikalen Distanzen, verglichen mit dem Radius  $R$ , klein sind.

Die Maxwellschen Gleichungen für das magnetische Feld  $(H_x, H_y, H_z)$  in den verschiedenen Gebieten lauten folgendermassen:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{div} (\mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}) &= 0, \end{aligned} \quad \text{für } |z| < \frac{D}{2}, \quad (3)$$

wobei der Magnetisierungsvektor  $\mathbf{M}$  als bekannte Funktion des Ortes und der

<sup>1)</sup> IBM-Forschungslaboratorium, Adliswil-Zürich.

Zeit vorausgesetzt wird;

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \end{aligned} \quad \text{für } \frac{D}{2} < |z| < a \quad \text{und} \quad |z| > b, \quad (4)$$

das heisst, das magnetische Feld  $\mathbf{H}$  ausserhalb der Leiter gehorcht den Gleichungen der Magnetostatik; die Gleichungen für die Stromdichte ( $G_x, G_y, G_z$ ) in den leitenden Platten sind

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{G}, \quad \operatorname{div} \mathbf{G} = 0, \\ \varrho \operatorname{rot} \mathbf{G} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \end{aligned} \quad \text{für } a < |z| < b. \quad (5)$$

Die Randbedingungen an Unstetigkeitsflächen verlangen:

$$\left. \begin{aligned} &\text{Stetigkeit der Normalkomponente von } \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M}, \\ &\text{Stetigkeit der Tangentialkomponente von } \mathbf{H}, \\ &\text{Verschwinden der Normalkomponente von } \mathbf{G} \text{ an der Oberfläche} \\ &\text{eines Leiters.} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Um diese verschiedenen Gleichungen zu lösen, wird eine Laplace-Transformation der zeitlichen Variablen und eine doppelte Fourier-Transformation der räumlichen Variablen ( $x, y$ ) vorgenommen, das heisst der Operator

$$\int_0^\infty e^{-pt} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x - i\beta y} dx dy \quad (7)$$

wird angewandt. Es wird angenommen, dass die Integrale existieren und dass die transformierten Funktionen in der  $x$ - und  $y$ -Richtung genügend stetig sind, um die Differentiationen nach  $x$  und  $y$  einfach als Multiplikation der transformierten mit  $i\alpha$  und  $i\beta$  erscheinen zu lassen. Da uns das für  $t \leq 0$  bestehende magnetostatische Feld nicht weiter interessiert, so soll es sofort von  $\mathbf{H}$  abgezogen werden. Die zeitlichen Ableitungen von  $\mathbf{H}$  erscheinen in der transformierten von  $\mathbf{H}$  wiederum einfach als Multiplikation mit  $p$ . Sinngemäss ist dann unter  $\mathbf{M}$  nur der zeitlich veränderliche Teil zu verstehen.

Es seien nun die transformierten Felder durch die entsprechenden kleinen Buchstaben  $\mathbf{m}, \mathbf{h}$  und  $\mathbf{g}$  geschrieben. Ausserdem werde der symbolische Vektor  $\mathbf{f} = (i\alpha, i\beta, \partial/\partial z)$  eingeführt. Dann werden die Feldgleichungen

$$[\mathbf{f} \times \mathbf{h}] = 0, \quad (\mathbf{f}, \mathbf{h} + 4\pi \mathbf{m}) = 0, \quad \text{für } |z| < \frac{D}{2}; \quad (8)$$

$$[\mathbf{f} \times \mathbf{h}] = 0, \quad (\mathbf{f}, \mathbf{h}) = 0, \quad \text{für } \frac{D}{2} < |z| < a, \quad |z| > b; \quad (9)$$



$$\begin{aligned} [\mathbf{f} \times \mathbf{h}] &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{g}, \quad (\mathbf{f}, \mathbf{h}) = 0, \\ \varrho [\mathbf{f} \times \mathbf{g}] &= -\frac{\dot{p}}{c} \mathbf{h}, \quad (\mathbf{f}, \mathbf{g}) = 0, \end{aligned} \quad \text{für } a < |z| < b. \quad (10)$$

Die Randbedingungen an Unstetigkeitsflächen in der  $z$ -Richtung bleiben wie bisher.  $\mathbf{m}$  ist als eine bekannte Vektorfunktion der Variablen  $\alpha, \beta$  und  $p$  aufzufassen. Für grosse Werte von  $|z|$  muss das Vektorfeld  $\mathbf{h}$  bei konstanten  $\alpha, \beta$  und  $p$  verschwinden.

Die Beschränkung von  $\mathbf{M}$  auf den Zylinder  $x^2 + y^2 \leq R^2$  soll erst später in der Rechnung berücksichtigt werden.

Die Gleichungssysteme (8), (9) und (10) können immer auf ordentliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung zurückgeführt werden, von denen nur die Gleichungen (8) nicht homogen sind. Mit den Abkürzungen

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \frac{4\pi p}{c^2}} = \sqrt{\gamma^2 + \frac{4\pi p}{c^2}} \quad (11)$$

ergibt sich in den verschiedenen Bereichen:

$$\left. \begin{aligned} (h_x, h_y) &= \frac{i}{\gamma} (\alpha, \beta) \left[ \kappa_1 \sinh \gamma z + \kappa_2 \cosh \gamma z \right. \\ &\quad \left. + \frac{4\pi i}{\gamma} (\alpha m_x + \beta m_y) \right], \\ h_z &= \kappa_1 \cosh \gamma z + \kappa_2 \sinh \gamma z - 4\pi m_y, \end{aligned} \right\} \quad \text{für } |z| < \frac{D}{2}; \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} (h_x, h_y) &= \frac{i}{\gamma} (\alpha, \beta) [\lambda_1 \sinh \gamma z + \lambda_2 \cosh \gamma z], \\ h_z &= \lambda_1 \cosh \gamma z + \lambda_2 \sinh \gamma z, \end{aligned} \right\} \quad \text{für } \frac{D}{2} < |z| < a; \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} (h_x, h_y) &= \frac{i}{\gamma} (\alpha, \beta) \frac{\delta}{\gamma} [\mu_1 \sinh \delta z + \mu_2 \cosh \delta z] \\ h_z &= \mu_1 \cosh \delta z + \mu_2 \sinh \delta z, \\ (g_x, g_y) &= \frac{i}{\gamma} (-\beta, +\alpha) \frac{\dot{p}}{\varrho c \gamma} [\mu_1 \cosh \delta z + \mu_2 \sinh \delta z], \\ g_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad \text{für } a < |z| < b; \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} (g_x, g_y) &= \frac{i}{\gamma} (-\beta, +\alpha) \frac{\dot{p}}{\varrho c \gamma} [\mu_1 \cosh \delta z + \mu_2 \sinh \delta z], \\ g_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} (h_x, h_y) &= \frac{i}{\gamma} (\alpha, \beta) [v_1 \sin \gamma z + v_2 \cos \gamma z], \\ h_z &= v_1 \cosh \gamma z + v_2 \sinh \gamma z, \end{aligned} \right\} \quad \text{für } b < |z|. \quad (16)$$

Von den Randbedingungen ist eine bereits erfüllt worden, nämlich  $g_z = 0$  für  $|z| = a$  und für  $|z| = b$ . Es ist daher aus (15) zu sehen, dass die Rand-

bedingung für  $g$  hinreicht, um die Stromverteilung in den leitenden Platten eben zu machen, das heisst die Komponente  $g_z$  zum Verschwinden zu bringen.

Die in den Gleichungen (13) bis (16) auftretenden Koeffizienten  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\nu$  sind nicht gleich für  $z > 0$  und  $z < 0$ . Darum werden sie im folgenden durch einen oberen Index  $+$  oder  $-$  gekennzeichnet, falls dies notwendig ist.

Durch die Randbedingungen (6) werden nun zwischen den Koeffizienten  $\kappa$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\nu$  lineare Beziehungen hergestellt. Das Verschwinden von  $h$  für grosse  $|z|$  erfordert, dass

$$\nu_1^+ + \nu_2^+ = 0, \quad \nu_1^- - \nu_2^- = 0. \quad (17)$$

Daraus folgt nach einiger Rechnung

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad \kappa_1 &= 4 \pi m_z \left( (a) \cosh \frac{\gamma D}{2} - (b) \sinh \frac{\gamma D}{2} \right), \\ (b) \quad \kappa_2 &= - \frac{4 \pi i}{\gamma} (\alpha m_x + \beta m_y) \left( - (a) \sinh \frac{\gamma D}{2} + (b) \cosh \frac{\gamma D}{2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

wobei die Ausdrücke (a) und (b) gegeben sind durch

$$\left. \begin{aligned} (a) &= e^{\gamma a} \cosh \delta (b - a) + \left( \frac{\delta}{\gamma} \cosh \gamma a + \frac{\gamma}{\delta} \sinh \gamma a \right) \sinh \delta (b - a), \\ (b) &= e^{\gamma a} \cosh \delta (b - a) + \left( \frac{\delta}{\gamma} \sinh \gamma a + \frac{\gamma}{\delta} \cosh \gamma a \right) \sinh \delta (b - a). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Für die weiteren Rechnungen ist es eine grosse Hilfe, zwei spezielle Annahmen zu treffen, welche physikalisch sinnvoll sind. Erstens soll die Dicke  $D$  als klein gegenüber den übrigen Längen, die in dem Problem auftreten, angenommen werden. Es sollen dann nur die niedrigsten Glieder in einer Entwicklung nach  $D$  berücksichtigt werden. Zweitens soll angenommen werden, dass  $m_z = 0$  ist. Dies kann dadurch gerechtfertigt werden, dass in einer dünnen ferromagnetischen Schicht das entmagnetisierende Feld die Magnetisierung immer in die Ebene der Schicht zwingen wird.

Es werden jetzt zwei spezielle Grössen untersucht. Einerseits interessiert das in der Ebene  $z = 0$  durch die benachbarten Leiter hervorgerufene magnetische Feld  $h_w$ . Es wird aus dem Gesamtfeld  $h$  erhalten, indem man das Feld  $h_s$  abzieht, welches auch in Abwesenheit der Leiter, das heisst im Falle  $b = a$ , besteht. Für dieses Wirbelfeld  $h_w$  erhält man aus (12) und (18) den Ausdruck

$$(h_{wx}, h_{wy}) = - \frac{8 \pi^2}{\gamma^2} (\alpha, \beta) (\alpha m_x + \beta m_y) \frac{\gamma D}{c^2} h(\gamma), \quad (20)$$

wobei  $h(\gamma)$  gegeben ist durch

$$h(\gamma) = \frac{1}{\delta} \frac{e^{-\gamma a} \sinh \delta (b - a)}{e^{\gamma a} \cosh \delta (b - a) + [(\delta/\gamma) \sinh \gamma a + (\gamma/\delta) \cosh \gamma a] \sinh \delta (b - a)}. \quad (21)$$

Andererseits ist es wichtig, die Stromverteilung in den Leitern zu kennen. Man erhält für die Stromdichte an der Oberfläche  $|z| = a$

$$(g_x, g_y) = \frac{2\pi}{\gamma^2} (-\beta, +\alpha) (\alpha m_x + \beta m_y) \frac{\rho D}{\rho c} g(\gamma), \quad (22)$$

wobei  $g(\gamma)$  gegeben ist durch

$$g(\gamma) = \frac{\cosh \delta (b-a) + (\gamma/\delta) \sinh \delta (b-a)}{e^{\gamma a} \cosh \delta (b-a) + [(\delta/\gamma) \sinh \gamma a + (\gamma/\delta) \cosh \gamma a] \sinh \delta (b-a)}. \quad (23)$$

Aus (20) und (22) lassen sich die «Ausbreitungsfunktionen» für das Wirbelfeld  $\mathbf{h}_w$  in der Ebene  $z = 0$  und für die Stromdichte  $\mathbf{g}$  in der Ebene  $z = a$  berechnen. Darunter werden in diesem Problem bei konstantem Parameter  $\rho$  diejenigen Matrizen mit zwei Reihen und zwei Spalten verstanden, deren Elemente von den Koordinatendifferenzen  $(x - \xi, y - \eta)$  zwischen dem Beobachtungspunkt  $(x, y)$  und dem Quellenpunkt  $(\xi, \eta)$  abhängen und welche die Anregung, das heisst  $\mathbf{h}_w$  oder  $\mathbf{g}$  im Punkt  $(x, y)$  als Funktion des magnetischen Momentes  $\mathbf{m}$  im Punkt  $(\xi, \eta)$  angeben.

Für das Wirbelfeld ist diese Ausbreitungsfunktion

$$- \frac{2\rho D}{\rho c^2} \iint d\alpha d\beta e^{i\alpha(x-\xi) + i\beta(y-\eta)} \frac{h(\gamma)}{\gamma^2} \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Für die Stromdichte  $\mathbf{g}$  in der Ebene  $z = a$  gilt ein ähnlicher Ausdruck.

In den Polarkoordinaten

$$x - \xi = r \cos \varphi, \quad y - \eta = r \sin \varphi \quad (25)$$

lässt sich (24) einmal integrieren, und es ergibt sich

$$- \frac{2\pi\rho D}{\rho c^2} \int_0^\infty \gamma d\gamma \left\{ J_0(\gamma r) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - J_2(\gamma r) \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \right\} h(\gamma). \quad (26)$$

Dabei ist eine bekannte Integraldarstellung der Bessel-Funktionen angewandt worden [1]<sup>2)</sup>.

Als nächster Schritt wird die Quellverteilung der Magnetisierung, wie sie durch (1) gegeben ist, berücksichtigt werden. In den Polarkoordinaten

$$\xi = \sigma \cos \chi, \quad \eta = \sigma \sin \chi \quad (27)$$

wird der Ausdruck (26) über  $\chi$  von 0 bis  $2\pi$  und über  $\sigma$  von 0 bis  $R$  integriert. Wenn man ausserdem noch setzt

$$x = s \cos \psi, \quad y = s \sin \psi, \quad (28)$$

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 515.

so erhält man weiter

$$r = \sqrt{s^2 - 2 s \sigma \cos(\psi - \chi) + \sigma^2}, \quad e^{2i\psi} = e^{2i\chi} \frac{s - \sigma e^{-i(\psi - \chi)}}{s - \sigma e^{i(\psi - \chi)}}. \quad (29)$$

Diese Formeln kann man in (24) einsetzen und das Additionstheorem von GRAF [2] anwenden. Dann braucht man die bekannte Formel

$$\int_0^R \sigma d\sigma J_0(\gamma \sigma) = \frac{\sigma}{\gamma} J_1(\gamma \sigma) \Big|_0^R = R^2 \frac{J_1(\gamma R)}{\gamma R}, \quad (30)$$

welche aus den Rekursionsbeziehungen zwischen den Bessel-Funktionen folgt [1], und erhält für die Laplace-Transformierte des Wirbelfeldes in der Ebene  $z = 0$

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\bar{H}_{wx}}{\bar{H}_{wy}} \right) &= - \frac{4 \pi^2 p D}{\varrho c^2} R^2 \int_0^\infty \gamma d\gamma \frac{J_1(\gamma R)}{\gamma R} \\ &\times \left\{ J_0(\gamma s) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - J_2(\gamma s) \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix} \right\} h(\gamma) \begin{pmatrix} \bar{M}_x \\ \bar{M}_y \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Der Querstrich über  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{M}$  soll andeuten, dass es sich um die Laplace-Transformierte bezüglich der Zeit handelt. In derselben Weise ergibt sich für die Stromdichte in der Ebene  $z = a$

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\bar{G}_x}{\bar{G}_y} \right) &= \frac{\pi p D}{\varrho c} R^2 \int_0^\infty \gamma d\gamma \frac{J_1(\gamma R)}{\gamma R} \\ &\times \left\{ J_0(\gamma s) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} - J_2(\gamma s) \begin{pmatrix} -\sin 2\psi & \cos 2\psi \\ \cos 2\psi & \sin 2\psi \end{pmatrix} \right\} g(\gamma) \begin{pmatrix} \bar{M}_x \\ \bar{M}_y \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Der Parameter  $p$  der Laplace-Transformation steckt in  $\bar{M}_x$  und  $\bar{M}_y$  und ist ausserdem noch in  $h(\gamma)$  und  $g(\gamma)$  vorhanden, da letztere von  $\delta$  abhängen, das durch (11) gegeben ist.

Ein Spezialfall lässt sich einfach behandeln, nämlich

$$a \ll R \quad \text{und} \quad b \ll R, \quad (33)$$

wobei die Bedingung  $b \ll R$  dahinfällt, falls bereits in (21) und (23) die Länge  $b - a$  gross gegenüber allen andern Längen angenommen wurde, was eine entsprechende Vereinfachung von (21) und (23) ergäbe. Solange  $s$  mit  $R$  vergleichbar ist, kommt die hauptsächliche Variation der Integranden in (31) und (32) von den Bessel-Funktionen her, aber nicht von  $h(\gamma)$  und  $g(\gamma)$ . Diese letzteren Funktionen können daher annäherungsweise durch ihre Werte für  $\gamma = 0$



ersetzt werden. Damit ist die Integration über  $\gamma$  auf die folgenden Integrale zurückgeführt [3]:

$$\int_0^\infty d\gamma J_{\nu-1}(\gamma\mu) J_\nu(\gamma\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^\nu & \text{für } \mu < \lambda, \\ 0 & \text{für } \mu > \lambda, \end{cases} \quad (34)$$

und man erhält aus (31) und (32)

$$\begin{pmatrix} \bar{H}_{wx} \\ \bar{H}_{wy} \end{pmatrix} \approx \begin{cases} -\frac{4\pi p D}{\varrho c^2} h(0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{M}_x \\ \bar{M}_y \end{pmatrix} & \text{für } s < R, \\ +\frac{4\pi^2 p D}{\varrho c^2} h(0) \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{M}_x \\ \bar{M}_y \end{pmatrix} \left(\frac{R}{s}\right)^2 & \text{für } s > R, \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{G}_x \\ \bar{G}_y \end{pmatrix} \approx \begin{cases} \frac{\pi p D}{\varrho c} g(0) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{M}_x \\ \bar{M}_y \end{pmatrix} & \text{für } s < R, \\ \frac{\pi p D}{\varrho c} g(0) \begin{pmatrix} -\sin 2\psi & \cos 2\psi \\ \cos 2\psi & \sin 2\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{M}_x \\ \bar{M}_y \end{pmatrix} \left(\frac{R}{s}\right)^2 & \text{für } s > R. \end{cases} \quad (36)$$

Die Grenzwerte von  $h(\gamma)$  und  $g(\gamma)$  für  $\gamma \rightarrow 0$  sind nach (21) und (23)

$$\left. \begin{aligned} h(0) &= \frac{\sinh \delta (b-a)}{\delta \cosh \delta (b-a) + \delta a \sinh \delta (b-a)}, \\ g(0) &= \frac{\cosh \delta (b-a)}{\cosh \delta (b-a) + \delta a \sinh \delta (b-a)}, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

wobei jetzt  $\delta$  einfach gegeben ist durch

$$\delta = \sqrt{\frac{4\pi p}{\varrho c^2}}. \quad (38)$$

Der Grenzfall  $b-a \rightarrow \infty$  wird auch noch aus (37) richtig erhalten, denn physikalisch bedeutet dies in vielen Fällen nur  $\delta^{-1} \ll b-a \ll R$ . Es ist nicht zu erwarten, dass die Formeln (35) und (36) im Bereich der Unstetigkeit, das heisst für Werte von  $s$ , wo  $|s-R| \gtrsim a$ , noch irgendwelche Gültigkeit haben, weil die Integrale (31) und (32) in Wirklichkeit über viele Schwankungen der Bessel-Funktionen mitteln und deshalb in der Nähe der Unstetigkeit sehr empfindlich gegenüber langsam variierenden Faktoren sein müssen. Es kann deshalb vorkommen, dass die Vektorfelder nach den Formeln (35) und (36) bei  $s=R$  unstetig sind, obwohl dies nur bedeutet, dass sie im Bereich  $|s-R| \gtrsim a$  sehr stark, aber stetig, variieren. Es wird sich allerdings zeigen, dass die durch (35) und (36) definierten Felder bei  $s=R$  in verständlicher Weise unstetig sind, obwohl sie natürlich dort keine stetigen Ableitungen haben. Es ist daher

vernünftig, anzunehmen, dass (35) und (36) im wesentlichen richtig sind. Zur näheren Erläuterung von (35) und (36) lässt sich zuerst sagen, dass das Wirbelfeld innerhalb und die Stromdichte oberhalb der ferromagnetischen Schicht, das heisst für  $s < R$ , homogen sind, und zwar das Wirbelfeld entgegengesetzt der Magnetisierungsänderung und die Stromdichte im rechten Winkel dazu. Ausserhalb der Schicht, das heisst für  $s > R$ , verhält sich der Betrag der Felder  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{G}$  wie  $(R/s)^2$  und schliesst stetig an die Beträge für  $s < R$  an. Im Bereich  $s > R$  erscheint die Schicht also wie ein magnetischer Dipol in zwei Dimensionen, was natürlich eine Folge der Begrenzung der Wirbelströme entweder durch die Dicke der leitenden Platten oder durch den Skineneffekt darstellt. Die Richtungen der Felder (35) und (36) für  $s > R$  ergeben sich einfach aus folgender geometrischer Konstruktion: In jedem Punkt wird der Vektor  $(\bar{M}_x, \bar{M}_y)$  bzw.  $(\bar{M}_y, -\bar{M}_x)$  am Kreis  $s = \text{konst}$  gespiegelt. Es lässt sich dann kontrollieren, dass sich der Fluss der Feldlinien in beiden Fällen schliesst.

Von besonderem Interesse sind die Grenzfälle einer dünnen leitenden Schicht,  $b \rightarrow a$ , und einer unendlich dicken leitenden Platte,  $b \rightarrow \infty$ . Es muss dann in (35) und (36) nach (37) eingesetzt werden

$$h(0) \cong (b - a), \quad g(0) \cong 1 \quad \text{für } b \rightarrow a, \quad (39)$$

$$h(0) \cong \frac{1}{\delta} \frac{1}{1 + \delta a}, \quad g(0) \cong \frac{1}{1 + \delta a} \quad \text{für } b \rightarrow \infty, \quad (40)$$

wobei natürlich  $\delta$  immer noch durch (38) gegeben ist. Im Falle (39) lässt sich die Laplace-Transformation der zeitlichen Variation ohne weiteres rückgängig machen, denn der Vektor  $(\bar{M}_x, \bar{M}_y)$  ist einfach mit  $p$  multipliziert worden, das heisst der Vektor  $(M_x, M_y)$  ist nach der Zeit differenziert worden. Im Falle (40) kann man  $\delta$  als die reziproke Eindringtiefe auffassen und für den höchsten Wert von  $p$  ausrechnen, für welchen  $(\bar{M}_x, \bar{M}_y)$  noch nicht vernachlässigt werden dürfen. Wenn sich dann ergibt, dass  $\delta a \ll 1$ , kann man  $h(0)$  einfach durch  $1/\delta$  ersetzen und die Umkehrung der Laplace-Transformation ist dann in vielen Fällen möglich.

Im allgemeinen Fall (37) ist zu bemerken, dass  $h(0)$  und  $g(0)$ , ebenso wie (21) und (23), meromorphe Funktionen von  $p$  sind, so dass sich die Umkehrung der Laplace-Transformation als eine Summe über gedämpfte Schwingungen darstellen lässt, falls auch  $(\bar{M}_x, \bar{M}_y)$  meromorph ist.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] E. T. WHITAKER and G. N. WATSON, *A Course in Modern Analysis*, (Cambridge University Press, 1927), S. 362.
- [2] ERDELYI et al., *Higher Transcendental Functions*, vol. 2 (Mc Graw-Hill, New York, 1953), S. 44.
- [3] ERDELYI et al., *Tables of Integral Transforms*, vol. 2 (Mc Graw-Hill, New York, 1954), S. 47.

## Summary

A ferromagnetic disc is placed between two conducting plates of infinite extent, so that the axis of the disc is perpendicular to the plates. The magnetization in the disc is homogeneous and varies with time  $t > 0$  in a known but arbitrary fashion. The eddy current distribution in the plates and the magnetic field which they generate in the disc are represented with the help of a Laplace transform with respect to time and a Hankel transform with respect to the distance from the center of the disc. In the special case where the distances perpendicular to the conducting plates are small compared to the radius of the disc, these two transforms can be inverted. The eddy currents and the generated magnetic fields are then easily visualized.

(Eingegangen: 18. Februar 1961.)

## Zur Kontinuum-Magneto-Gasdynamik Stationäre rotationssymmetrische Strömung eines vollkommen leitenden Plasmas

*Adolf Busemann zum 60. Geburtstag*

Von ERNST HÖLDER, Mainz

Die klassische Gasdynamik [1]<sup>1)</sup> ebener oder rotationssymmetrischer Strömungen hat A. BUSEMANN [2] – für den Ingenieur wie für den Mathematiker gleichermaßen lehrreich – dargestellt; ich erinnere mich dankbar seiner Braunschweiger Vorlesung.

Heute, nach zwanzig Jahren, ist die Magneto-Gasdynamik [3] aktuell; lediglich deren Kontinuumstheorie haben wir im Auge. Ich möchte die Aufmerksamkeit darauf lenken, dass auch hier die *stationären rotationssymmetrischen Strömungen eines vollkommen leitenden Plasmas* in ähnlichen Schritten wie in der Gasdynamik behandelt werden können: Ausgangspunkt ist das Mollier-Diagramm ( $A$ ) für adiabatische Zustandsänderungen. Nachdem das Induktionsgesetz ( $F$ ) die magnetische Induktion  $\mathbf{B}$  aus Massenstromdichte  $\rho \mathbf{v}$  und Massendichte  $\rho$  zu berechnen lehrt, gibt von den Eulerschen Impulsgleichungen die auf das Azimut bezügliche Gleichung ( $E_3$ ) längs einer Stromlinie die Konstanz einer Linearkombination aus Drehmoment  $\Omega$  und azimuthaler Komponente  $B_3$  der Induktion, und damit  $\Omega$  als gebrochene lineare Funktion von  $\rho$ . Sodann folgert man aus den beiden anderen Impulsgleichungen zuerst eine

<sup>1)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, S. 525.

durch  $B_3$  ergänzte Bernoullische Gleichung ( $B$ ), weiter den Drehungssatz ( $D$ ), die Erhaltung einer Linearkombination der azimuthalen Komponenten  $\zeta$  von Wirbelstärke und elektrischer Stromdichte  $k$ ; das ist für die der Kontinuität ( $C$ ) genügende Stromfunktion  $\psi$  die gewünschte partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, eine Verallgemeinerung der Differentialgleichung für die Zirkulation einer Atmosphäre [5b].

Nur im axialsymmetrischen Strömungsfall, wo auch die magnetischen Kraftlinien in den Ebenen durch die Achse verlaufend angenommen werden, scheint nach dem Vorbild des Busemannschen Druckberges, [2], S. 439, ein Druck-Magnetberg mit seinen Doppeltangenten die Sprungeigenschaften am Verdichtungsstoss darzustellen und die Figuratrix für ein Variationsproblem abzugeben [5a].

### 1. Strömungen mit adiabatischen Zustandsänderungen

Das *perfekte Plasma* (das heisst elektrisch vollkommen leitend, reibungsfrei, und nicht wärmeleitend) mit der Zustandsgleichung zwischen Druck  $p$  und Dichte  $\rho = \rho_i$  in Form des Mollier-Diagramms

$$(A) \quad p = p(i, s),$$

Entropie  $s = s^0 = \text{konst}$  bei der vorausgesetzten adiabatischen Bewegung, Enthalpie  $i$ , ebenfalls pro Masseneinheit, kann sich in einer *stationären rotations-symmetrischen* Bewegung befinden. Selbst dabei kann der Fermische «Accelerationsmechanismus» von Ort zu Ort wirksam sein, der namentlich bei instationären Bewegungen interessant und technisch bedeutsam ist.

Die zugrunde gelegten Differentialgleichungen [3] drücken neben der Divergenzlosigkeit der magnetischen Induktion  $\mathbf{B}$  und der Massenstromdichte  $\rho \mathbf{v}$  das Induktionsgesetz und die Eulerschen Impulsgleichungen aus.

$$(F_0), (F): \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = 0,$$

$$(C), (E): \quad \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad [\nabla \times \mathbf{v}] \times \mathbf{v} = -\nabla (\mathfrak{T} + \mathfrak{A}) - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho \mu} \times [\nabla \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B}.$$

Wir legen Zylinderkoordinaten  $x, y, \varphi$  zugrunde, in denen das Quadrat des Linienelementes

$$dx^2 + dy^2 + y^2 d\varphi^2, \quad g = y^2$$

ist. Sämtliche Zustandsgrößen hängen nicht vom Azimut  $\varphi$  ab.  $y$  ist der Abstand von der Rotations- $x$ -Achse.



Die Differentialgleichungen sind, in Komponenten nach dem orthonormierten Dreiein in Richtung der Zylinderkoordinaten<sup>2)</sup>:

$$2(\eta w - \zeta v) = -\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{T} + \mathfrak{U}) - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x} + \frac{1}{\varrho}(j C - k B), \quad (1.1)$$

$$2(\zeta u - \xi w) = -\frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{T} + \mathfrak{U}) - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial y} + \frac{1}{\varrho}(k A - i C), \quad (1.2)$$

$$2(\xi v - \eta u) = \frac{1}{\varrho}(i B - j A). \quad (1.3)$$

$\mathfrak{U}(x, y)$  Kräftefunktion pro Masseneinheit,  $\mathfrak{T} = \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2$ ,  $\mu$  (konstante) magnetische Permeabilität. Drehung  $\nabla \times \mathbf{v} = 2(\xi, \eta, \zeta)$ , elektrische Stromdichte

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} = (i, j, k). \quad (1.4)$$

<sup>2)</sup> In der Formel bei LIEPMANN-COLE [3], S. 188, steht links in Cartesischen Koordinaten

$$\nabla \cdot [-\boldsymbol{\pi}] = \frac{1}{\mu} \frac{dM}{(dt)} \quad (1.5)$$

in meiner Beziehung, wo die vektorielle Differentialform

$$\vec{M} = -\mathbf{B} B + \frac{1}{2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \vec{d\sigma} \quad (1.6)$$

und das äussere Differential

$$\left. \begin{aligned} d\vec{M} &= -d\mathbf{B} (\mathbf{B} \cdot \vec{d\sigma}) + (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{B}) \vec{d\sigma} \\ &= -[d\vec{\sigma} \times d\mathbf{B}] \times \mathbf{B} = -[\nabla \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B} (dt) \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

sind. Dabei ist die Differentialform der Induktion (gleich in den Zylinder-Koordinaten)

$$\left. \begin{aligned} B &= B_{23} dy d\varphi + B_{31} d\varphi dx + B_{12} dx dy \\ &= B^1 d\sigma_1 + B^2 d\sigma_2 + B^3 d\sigma_3 = A d\sigma_1 + B d\sigma_2 + C d\sigma_3 = (\mathbf{B} \cdot \vec{d\sigma}) \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} B^1 &= \frac{B_{23}}{y}, \quad B^2 = \frac{B_{31}}{y}, \quad B^3 = \frac{B_{12}}{y} = \frac{C}{y}, \quad \mathbf{B} = (B^1, B^2, C) = (A, B, C); \\ d\sigma_1 &= y dy d\varphi, \quad d\sigma_2 = y d\varphi dx, \quad d\sigma_3 = y dx dy = y d\sigma, \\ d\vec{\sigma} &= (d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3) \text{ Oberflächenelement; } (dt) = y dx dy d\varphi \text{ Volumenelement.} \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Auf der rechten Seite kommt also mit (1.4) der Ausdruck

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\pi} = -\frac{1}{\mu} \frac{dM}{(dt)} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} [\nabla \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B}. \quad (1.10)$$

Hier steht die «legitim-vektorielle Form» im Sinne von SOMMERFELD [4], S. 81, 326, die man ohne weiteres auf Zylinderkoordinaten umschreiben kann.

## 2. Magnetische Induktion

Aus dem *Induktionsgesetz* (F) folgt mit den Komponenten  $u, v, w$  der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  nach dem den Zylinderkoordinaten angepassten Orthosystem von *Einheitsvektoren* und mit den entsprechenden Komponenten der magnetischen Induktion  $\mathbf{B} = (A, B, C)$  für die im bewegten vollkommen leitenden Plasma allein vorhandenen elektrischen Feldstärken

$$B w - C v = N_x, \quad C u - A w = N_y, \quad A v - B u = 0 \quad (2.1)$$

mit einer Funktion  $N$ , für die

$$u N_x + v N_y = 0 \quad (2.2)$$

gilt, die sich also längs einer Stromlinie nicht ändert.

Die Kontinuitätsgleichung

$$(C) \quad (\gamma \varrho u)_x + (\gamma \varrho v)_y = 0$$

kann man im rotationssymmetrischen Fall durch eine Stromfunktion  $\psi(x, y)$  mit der Eigenschaft

$$\gamma \varrho u = \psi_y = q, \quad \gamma \varrho v = -\psi_x = -p \quad (2.3)$$

befriedigen. Dann bedeutet (2.2), das heißt  $\psi_y N_x - \psi_x N_y = 0$ , dass  $N = N(\psi)$  ist.

Aus der Divergenzlosigkeit der magnetischen Induktion ( $F_0$ ),

$$(B_{23})_x + (B_{31})_y = 0,$$

die wegen (1.9) auch

$$(\gamma B^1)_x + (\gamma B^2)_y = 0 \quad (2.4)$$

geschrieben werden kann, folgt ebenso

$$\gamma A = \gamma B^1 = M_y, \quad \gamma B = \gamma B^2 = -M_x, \quad (2.5)$$

mit  $M = M(\psi)$ .

Also gilt mit  $M'(\psi) = m$ ,  $N'(\psi) = n$  für  $A = B^1 = B_1$ ,  $B = B^2 = B_2$ ,  $C = B_3/\gamma = \gamma B^3$

$$(F) \quad \boxed{A = m \varrho u, \quad B = m \varrho v, \quad C = m \varrho w + n \varrho \gamma.} \quad (2.6)$$

## 3. Konstante Linearkombination von Drehmoment und azimuthaler Komponente der Induktion

Mit dem *Rotationsmoment*

$$\Omega = \gamma w = w_3 \quad (3.1)$$

sind im Impulssatz die Komponenten der Drehung  $\nabla \times \mathbf{v}$

$$2\xi = \frac{\Omega_y}{\gamma}, \quad 2\eta = -\frac{\Omega_x}{\gamma}, \quad 2\zeta = v_x - u_y \quad (3.2)$$

und analog mit  $B_3 = \gamma C$  die Komponenten der elektrischen Stromdichte

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B},$$

$$\left. \begin{aligned} i &= \frac{1}{\mu \gamma} \frac{\partial B_3}{\partial y} = \frac{1}{\mu \gamma} (\gamma C)_y, & j &= -\frac{1}{\mu \gamma} \frac{\partial B_3}{\partial x} = -\frac{1}{\mu \gamma} (\gamma C)_x, \\ k &= \frac{1}{\mu} (B_x - A_y). \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Die 3. Impulsgleichung (1.3) hat die Gestalt

$$\frac{1}{\gamma} (\Omega_y v + \Omega_x u) - \frac{1}{\varrho \mu \gamma} ((B_3)_y m \varrho v + (B_3)_x m \varrho u) = 0, \quad (3.4)$$

integriert

$$(E_3) \quad \boxed{\Omega - m \frac{B_3}{\mu} = l(\psi)}.$$

Also gilt für das Rotationsmoment  $\Omega$  die Beziehung

$$\Omega \left(1 - \frac{m^2}{\mu} \varrho\right) - \frac{m}{\mu} n \varrho \gamma^2 = l, \quad (3.5)$$

die

$$\boxed{\Omega = \frac{\mu l + m n \varrho \gamma^2}{\mu - m^2 \varrho}}, \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\frac{B_3}{\mu} = \frac{m l + n \gamma^2}{\mu - m^2 \varrho} \varrho} \quad (3.6)$$

durch  $\varrho, \gamma, \psi$  ausgedrückt gibt.

#### 4. Durch Induktionskomponente ergänzte Bernoullische Gleichung

Nun kann noch die Dichte  $\varrho = p_i$ , nämlich  $i$ , vermöge einer *Bernoullischen Gleichung* ( $B$ ) längs jeder Stromlinie durch die Komponenten  $p, q$  der Stromdichte, das heisst die 1. Ableitungen von  $\psi$  ausgedrückt werden. Dazu benutzen wir die kovariante Webersche Form der Bewegungsgleichungen (1.1), (1.2) mit den Drehungskomponenten (3.2) und erhalten durch Faltung mit  $u, v$  mit der Bezeichnung

$$D_t = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \quad (4.1)$$

$$-D_t \left( \mathfrak{T} + \mathfrak{A} + \frac{p}{\varrho} + u \right) + \frac{1}{\varrho} \mathbf{v} \cdot [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] = 0. \quad (4.2)$$

Hier ist der Wärmehalt  $i = u + p/\varrho$ ,  $u$  die innere Energie pro Masseneinheit, und für die adiabatische Bewegung der 1. Hauptsatz berücksichtigt, mit der absoluten Temperatur  $T = -p_s/\varrho$

$$p D_t \frac{1}{\varrho} + D_t u = T D_t s = 0. \quad (4.3)$$

Wegen

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varrho} \mathbf{v} \cdot [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] &= \frac{1}{\varrho} \mathbf{j} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{v}] \\ &= \frac{1}{\varrho \mu y} \{ (B_3)_y (-n \varrho y \cdot v) - (B_3)_x (n \varrho y \cdot u) \} = -\frac{1}{\mu} D_t (B_3 n), \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

$k$  fällt heraus, kommt also integriert die Bernoullische Gleichung

$$(B) \quad \boxed{\mathfrak{T} + \mathfrak{U} + i + \frac{B_3 n}{\mu} = h(\psi)},$$

beziehungsweise

$$\frac{1}{2} (u^2 + v^2) + i + \Omega \left( \frac{\Omega}{2 y^2} + \frac{n}{m} \right) = h + \frac{n l}{m} - \mathfrak{U}. \quad (4.5)$$

heraus.

Aus der Bernoullischen Gleichung (B) folgt wegen (3.6) nach kurzer Rechnung

$$\frac{1}{2} (u^2 + v^2) = i_0 - i - \mathfrak{R}(i) \quad (4.6)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} i_0(x, y, z) &= h(z) - \frac{l^2(z)}{2 y^2} - \mathfrak{U}(x, y), \\ \mathfrak{R}(i, x, y, z) &= \frac{(m l + n y^2)^2}{2 y^2} \frac{2 \mu - m^2 p_i}{(\mu - m^2 p_i)^2} p_i \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

und aus (2.3)

$$y^2 p_i^2 [i_0 - i - \mathfrak{R}(i)] = p^2 + q^2; \quad (4.8)$$

wird dies nach  $i$  aufgelöst:  $i = \mathfrak{I}(p^2 + q^2; x, y, z)$ , so ist  $(u, v)$  durch  $(p, q)$  ausgedrückt:

$$u = \frac{q}{y} \frac{1}{p_i (\mathfrak{I}(p^2 + q^2))}, \quad v = -\frac{p}{y} \frac{1}{p_i (\mathfrak{I}(p^2 + q^2))}. \quad (4.9)$$

## 5. Linearkombination der azimuthalen Komponenten von Wirbelstärke und Stromdichte

Endlich bekommt man wieder den *Drehungssatz* durch Anwendung der Differentialoperation

$$D_\nu = -v \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{bzw.} \quad D_\psi = \frac{D_\nu}{D_\nu \psi} = \frac{D_\nu}{y \varrho (u^2 + v^2)}, \quad (5.1)$$



$$\begin{aligned}
 (u^2 + v^2) 2\zeta - 2w(\xi u + \eta v) &= (u^2 + v^2) 2\zeta - \frac{\Omega}{y^2} D_\nu \Omega \\
 &= -D_\nu (\mathfrak{T} + \mathfrak{U}) - \frac{1}{\varrho} D_\nu \mathfrak{p} + \frac{1}{\varrho} K_3 \\
 &= -D_\nu \left( \mathfrak{T} + \mathfrak{U} + \frac{\mathfrak{p}}{\varrho} + u \right) + \mathfrak{p} D_\nu \frac{1}{\varrho} + D_\nu u + \frac{1}{\varrho} K_3,
 \end{aligned} \quad (5.2)$$

wo die 3. Komponente

$$\begin{aligned}
 K_3 &= (\mathbf{v} \times [\mathbf{j} \times \mathbf{B}])_3 = u [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]_2 - v [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]_1 \\
 &= u (kA - iC) - v (jC - kB) \\
 &= -\frac{C}{\mu y} (-v(B_3)_x + u(B_3)_y) + k(uA + vB) \\
 &= -\frac{C}{\mu y} D_\nu B_3 + km(u^2 + v^2)\varrho \\
 &= -\left(n + \frac{m\Omega}{y^2}\right)\varrho D_\nu \frac{B_3}{\mu} + mk(u^2 + v^2)\varrho.
 \end{aligned} \quad (5.3)$$

So erhält man den Drehungssatz

$$\begin{aligned}
 \frac{2\zeta}{y\varrho} = \frac{\Omega}{y^2} \left[ D_\psi \left( \Omega - \frac{mB_3}{\mu} \right) + \frac{m'B_3}{\mu} \right] - D_\psi \left( \mathfrak{T} + \mathfrak{U} + i + \frac{nB_3}{\mu} \right) \\
 + \frac{n'B_3}{\mu} + \frac{mk}{y\varrho} + T D_\psi s,
 \end{aligned} \quad (5.4)$$

falls *adiabatische Schichtung*

$$\mathfrak{p} D_\nu \frac{1}{\varrho} + D_\nu u = T D_\nu s \quad (5.5)$$

besteht. Oder mit

$$\Omega = l + \frac{mB_3}{\mu}$$

$$(D) \quad \frac{2\zeta - mk}{y\varrho} = \frac{\Omega}{y^2} \left( l' + \frac{m'B_3}{\mu} \right) - \left( h' - \frac{n'B_3}{\mu} \right) + T s'; \quad (5.6)$$

während rechts nur Terme in den Ableitungen 1. Ordnung auftreten, steht links der negative Differentialausdruck 2. Ordnung in  $\psi$ :

$$\begin{aligned}
 -2\zeta + mk &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\psi_x}{y\varrho} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\psi_y}{y\varrho} - \frac{m}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{m\psi_x}{y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{m\psi_y}{y} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{m^2}{\mu} \right) \frac{\psi_x}{y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{m^2}{\mu} \right) \frac{\psi_y}{y} \right] + \frac{m m'}{\mu} \frac{\psi_x^2 + \psi_y^2}{y}.
 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Der 1. Term ist

$$\nabla \cdot \left[ \left( 1 - \frac{m^2 \varrho}{\mu} \right) \frac{\nabla \psi}{y \varrho} \right] = - \left( \nabla \times \left[ \left( 1 - \frac{b_0^2}{u^2 + v^2} \right) \mathbf{v} \right] \right)_3, \quad (5.8)$$

mit

$$b_0^2 = \frac{m^2}{\mu} \varrho (u^2 + v^2) = \frac{|\mathbf{B}_0|^2}{\mu \varrho}; \quad (5.9)$$

$b_0 = |\mathbf{B}_0|/\sqrt{\mu \varrho}$  ist die Alfvén-Geschwindigkeit für eine «inkompressible» Transversalwelle, die Drehfläche normal zur Komponente  $\mathbf{B}_0 = (A, B)$  des Magnetfeldes in der Meridianebene ist. Wir erhalten im ganzen eine elliptische Differentialgleichung 2. Ordnung in  $\psi$ .

## 6. Variationsproblem für die axialsymmetrische Strömung eines Plasmas

Im Fall einer *axialsymmetrischen Strömung*, wo auch die magnetischen Kraftlinien (identisch mit den Stromlinien) in der Ebene durch die Achse verlaufen,

$$\Omega = \gamma w = 0, \quad B_3 = \gamma C = 0, \quad n = 0, \quad l = 0, \quad (6.1)$$

zeigen wir noch, dass die Differentialgleichung (D) die Lagrangesche Gleichung eines *Variationsproblems* ist. Wir nehmen als Grundfunktion

$$f = f(x, y, z; \dot{p}, q) = f_0 + f_1, \quad (6.2)$$

$$\dot{p} = \psi_x = -\gamma \varrho v, \quad q = \psi_y = \gamma \varrho u, \quad (6.3)$$

wo

$$f_0 = \gamma (\mathfrak{p} + \varrho (u^2 + v^2)) \quad (6.4)$$

die alte Grundfunktion für das Variationsproblem der rotationssymmetrischen Bewegung eines *Gases* ist, aufgefasst als Funktion von  $x, y, z; \dot{p}, q$ , wie oben bei (4.9) allgemein ausgeführt ist:

$$f_0 = \gamma \mathfrak{p} (\mathfrak{I} (p^2 + q^2)) + \frac{p^2 + q^2}{\gamma \mathfrak{p}_i (\mathfrak{I} (p^2 + q^2))}. \quad (6.5)$$

Bei einer ebenen Strömung fehlt hier und im folgenden der Faktor  $\gamma$ . Dazu kommt der vom Magnetismus herrührende Zusatzterm

$$f_1 = -\frac{1}{2} \frac{m^2}{\mu \gamma} (p^2 + q^2). \quad (6.6)$$

Dann wird

$$\xi = -f_p = -f_{0p} + \frac{m^2}{\mu \gamma} \dot{p}, \quad \eta = -f_q = -f_{0q} + \frac{m^2}{\mu \gamma} q. \quad (6.7)$$

Bei (6.1) gilt die Bernoullische Gleichung (B) mit  $\Re(i) = 0$ , und (6.3) gibt den alten Zusammenhang zwischen  $(u, v) \leftrightarrow (\dot{p}, q)$  — wie in [5a], S. 373. Wegen der Reziprozität der Legendre-Transformation bekommt man

$$-f_{0p} = v, \quad -f_{0q} = -u, \quad (6.8)$$

somit

$$\xi = v \left( 1 - \frac{m^2}{\mu} \varrho \right), \quad \eta = -u \left( 1 - \frac{m^2}{\mu} \varrho \right), \quad \varrho = p_i \left( i_0 - \frac{1}{2} (u^2 + v^2), s \right). \quad (6.9)$$

Auf der einen Seite ist die Divergenz

$$\left. \begin{aligned} \frac{df_p}{dx} + \frac{df_q}{dy} &= -\frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dy} \\ &= -\left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{m}{\mu} \left( \frac{\partial(m \varrho v)}{\partial x} - \frac{\partial(m \varrho u)}{\partial y} \right) - \frac{m'}{\mu} \frac{m}{y} (p^2 + q^2) \\ &= -2\zeta + m k - \frac{m m'}{\mu y} (p^2 + q^2). \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Auf der anderen Seite berechnet man aus (4.6)

$$\left. \begin{aligned} f_z = f_{0z} + f_{1z} &= y \left( p_i \frac{\partial i_0}{\partial z} + p_s \frac{ds}{dz} \right) - \frac{1}{\mu} \frac{m m'}{y} (p^2 + q^2) \\ &= y \varrho [h'(\psi) - T s'(\psi)] - \frac{m m'}{\mu y} (p^2 + q^2). \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

Das Variationsproblem

$$\iint f(x, y, z; p, q) dx dy \rightarrow \text{stationär} \quad (6.9)$$

für die Stromfunktion

$$z = \psi(x, y), \quad p = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

hat die Lagrangesche Gleichung

$$\frac{df_p}{dx} + \frac{df_q}{dy} = f_z. \quad (6.12)$$

Das ist

$$-2\zeta + m k = y \varrho (h' - T s'), \quad (6.13)$$

unser Wirbelsatz (D).

## 7. Druck-Magnetberg als Figuratrix

Gleichbedeutend mit (6.12) sind die Integralrelationen für jedes Teilgebiet  $T$  der Meridianebene und seinen Rand  $\partial T$

$$\left. \begin{aligned} \int_{\partial T} \xi dy - \eta dz &= \int_T \bar{\varphi}_x dx dy, \quad \int \xi dz - \zeta dx = \int \bar{\varphi}_y dx dy, \\ \int \eta dx - \xi dy &= \int \bar{\varphi}_z dx dy \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

mit dem Druck-Magnetberg als Figuratrix

$$\zeta = \bar{\varphi}(\xi, \eta; x, y, z) = f - p f_p - q f_q \quad (7.2)$$

$$= y p \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{m^2}{\mu} \frac{p_i^2}{p} (u^2 + v^2) \right),$$

wo in  $p$  und  $p_i$  das Argument  $i = i_0 - \frac{1}{2} (u^2 + v^2)$  steht und vermöge

$$(u^2 + v^2) \left[ 1 - \frac{m^2}{\mu} p_i \left( i_0 - \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right) \right]^2 = \xi^2 + \eta^2$$

$u^2 + v^2$  auf  $\xi^2 + \eta^2$  umzurechnen ist.

Für einen schmalen Streifen zu beiden Seiten eines Verdichtungsstosses  $\mathfrak{S}$  folgen daraus die *Sprungrelationen*

$$[\xi] : [\eta] : [\zeta] = dx : dy : dz \quad (7.3)$$

für den Sprung

$$[\vec{\xi}] = \vec{\xi} - \vec{\xi}^0.$$

Diese besagt nach [5c], dass die Zustandsänderung  $\vec{\xi} - \vec{\xi}^0$  bei einem Stoss durch eine Doppeltangente dargestellt ist, die von einem Punkt  $(\xi^0, \eta^0, \zeta^0)$  der zu  $s = s^0$  gehörenden Figuratrix zu einem Punkt  $(\xi, \eta, \zeta)$  einer zweiten Fläche

$$\zeta = \bar{\varphi}(\xi, \eta; s) \quad \text{mit} \quad s > s^0 \quad (7.4)$$

führt, in dem diese von der Tangente ebenfalls berührt wird, wie es BUSEMANN [2], S. 439, angegeben hat.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] J. ACKERET, *Gasdynamik*, Handbuch der Physik VII (Berlin 1927).
- [2] A. BUSEMANN, *Gasdynamik*, Handbuch der Experimentalphysik IV, 1 (1931), S. 341–460.
- [3] *Symposion of Plasma Dynamics*, ed. F. H. CLAUSER, Pergamon Press (1960). Insbes. Beitrag H. W. LIEPMANN und J. D. COLE, *Continuum Plasma Dynamics*, S. 187–220.
- [4] A. SOMMERFELD, *Vorlesungen über theoret. Physik II* (Leipzig 1945).
- [5a] E. HÖLDER, *Klassische und relativistische Gasdynamik als Variationsproblem*, Math. Nachr. 4, 366–381 (1950/51).
- [5b] E. HÖLDER, *Aufbau einer Extremalfläche hyperbolischen Typs aus ihren Charakteristiken* (mittels des Euklidischen Zusammenhangs des Cartanschen Raumes). Arch. Math. 5, 510–521 (1954).
- [5c] E. HÖLDER, *Die Differentialgleichung für die Stromfunktion der stationären rotationssymmetrischen Zirkulation einer adiabatisch veränderlichen reibungsfreien Atmosphäre über der Erde*, Meteorolog. Rundschau 1, 449–450 (1948).



Die in [5a] und [5b] dargestellten Variationseigenschaften der klassischen Gasdynamik und ihren Zusammenhang mit den Sprungrelationen am Verdichtungsstoss habe ich zuerst in meiner unveröffentlichten *Lilienthal-Preisschrift* entwickelt, die 1943 in der Luftfahrtforschungsanstalt Braunschweig entstanden ist, im Aerodynamischen Institut von Professor BLENCK.

*Anmerkung bei der Korrektur:*

Erst nachträglich habe ich (auf ebene Potentialströmungen bezügliche) Variationsbetrachtungen bemerkt, bei A. BUSEMANN, Problems of Flow Existence and Stability in Magnetohydrodynamics in 'The Magnetodynamics of Conducting Fluids', ed. by D. Bershader, Stanford Univ. Press Calif. 1959, p. 3–16; ferner die auf einem isoperimetrischen Variationsprinzip von S. CHANDRASEKHAR beruhende Formulierung der Grundgleichungen gewisser rotationssymmetrischer Strömungen (unsere  $s' = n' = m' = 0$ ,  $h' = -l' n/m = \text{konst}$ ) bei L. WOLTJER, On Hydromagnetic Equilibrium, Proc. Nat. Acad. of Science 44, (1958), p. 833–841.

*Summary*

In the case of rotational symmetry for the steady motion of a perfectly conducting plasma a differential equation of 2nd order for the stream function is given by completing BERNOULLI's equation, the equation for the moment of rotation and the equation for the vorticity respectively by the azimuthal component of the magnetic field and the azimuthal component of electric current density.

(Eingegangen: 14. März 1961.)

## Über die Grenzwahrscheinlichkeiten einer speziellen homogenen Markoffschen Kette<sup>1)</sup>

VON HANS-JOACHIM TÖPFFER, Berlin, Deutschland<sup>2)</sup>

Bei gewissen physikalischen Fragestellungen wird man auf Markoffsche Ketten mit endlich vielen, sagen wir  $N + 3$ , verschiedenen Zuständen  $E_1, \dots, E_{N+3}$  geführt, die durch die folgende Übergangsmatrix beschrieben werden:

<sup>1)</sup> Die Anregung zu dieser Fragestellung verdanke ich Herrn Dipl.-Phys. J. BIRSACK vom Sektor Kernchemie des Hahn-Meitner-Instituts für Kernforschung Berlin. Herr BIRSACK hat das in diesem Zusammenhang auftretende mathematische Problem in anderer Form behandelt. Unsere Zusammenarbeit hatte zum Ziel, eine für die numerische Bearbeitung durch ein elektronisches Rechenggerät geeignete mathematische Form zu finden.

<sup>2)</sup> Hahn-Meitner-Institut für Kernforschung, Sektor Mathematik, Berlin-Wannsee.

$$P = \|\dot{p}_{ij}\| = \left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ \dot{p} & 0 & q & 0 & & & & & r \\ 0 & \dot{p} & 0 & q & & & & & . \\ . & . & . & . & & & & & . \\ . & . & . & . & . & & & & . \\ . & . & . & . & . & . & & & . \\ . & . & . & . & . & . & . & & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \quad i, j = 1, \dots, N+3. \quad (1)$$

Man denke etwa an ein Elektron, das endlich vieler Energiestufen ( $E_1, \dots, E_{N+2}$ ) fähig sei und sich in einem «zufallsgesteuerten» elektrischen Feld befindet. Ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Elektron zwischen zwei Beobachtungen auf die nächst-niedrigere, bzw. nächst-höhere Energiestufe gebracht wird,  $\dot{p}$ , bzw.  $q$ , und wird es während der gleichen Zeit mit der Wahrscheinlichkeit  $r$  durch Stossvorgänge vernichtet (Zustand  $E_{N+3}$ ), so gelangt man zu der angegebenen Übergangsmatrix, wenn man annimmt, dass die Energiestufen  $E_1$  und  $E_{N+2}$  sowie der Zustand  $E_{N+3}$  stabil seien, das heisst, einmal erreicht, nicht mehr verlassen werden können.

Die Elemente  $\dot{p}_{ij}$  der Matrix  $P$  geben die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass sich das betrachtete System nach einem «Versuch» im Zustand  $E_j$  befindet, unter der Bedingung, dass es vor dem Versuch den Zustand  $E_i$  besass.

Bekanntlich gilt für solche Übergangsmatrizen notwendig

$$\sum_i \dot{p}_{ij} = 1, \quad (2)$$

wir werden also

$$\dot{p} + q + r = 1 \quad (3)$$

voraussetzen.

Die Matrix der Wahrscheinlichkeiten für den Übergang des Systems vom Zustand  $E_i$  in den Zustand  $E_j$  nach einer Kette von  $n$  Versuchen ist nach MARKOFF  $P^n$ . Uns interessiert hier der Grenzfall einer unendlichen Kette von Versuchen.

Die zugehörige Übergangsmatrix bezeichnen wir, wenn sie existiert, mit

$$P^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n. \quad (4)$$

Die Elemente der Matrix  $P^\infty = \|\dot{p}_{ij}^{(\infty)}\|$  nennen wir Grenzwahrscheinlichkeiten.

Mit Hilfe des folgenden Satzes aus der Theorie der stochastischen Matrizen<sup>3)</sup> lassen sich diese Grenzwahrscheinlichkeiten berechnen:

<sup>3)</sup> Eine quadratische Matrix heisst stochastisch, wenn ihre Elemente nicht negativ und alle ihre Zeilensummen gleich eins sind.







Die Polynome  $\tilde{U}_n(x)$  folgen der Rekursionsvorschrift (vgl. [2]):

$$\left. \begin{aligned} \tilde{U}_0(x) &= 1, \\ \tilde{U}_1(x) &= x, \\ \tilde{U}_{n+2}(x) &= x \tilde{U}_{n+1}(x) - \frac{1}{4} \tilde{U}_n(x) \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Ersetzen wir in dieser Formel  $x$  durch  $\lambda/2\sqrt{pq}$  und multiplizieren auf beiden Seiten mit  $(2\sqrt{pq})^{n+2}$ , so entsteht:

$$\begin{aligned} (2\sqrt{pq})^{n+2} \tilde{U}_{n+2} \left( \frac{\lambda}{2\sqrt{pq}} \right) &= \lambda (2\sqrt{pq})^{n+1} \tilde{U}_{n+1} \left( \frac{\lambda}{2\sqrt{pq}} \right) \\ &\quad - pq (2\sqrt{pq})^n \tilde{U}_n \left( \frac{\lambda}{2\sqrt{pq}} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Mithin ist die Rekursionsvorschrift (8) erfüllt, wenn wir

$$D_n(\lambda) = (2\sqrt{pq})^n \tilde{U}_n \left( \frac{\lambda}{2\sqrt{pq}} \right) \quad (15)$$

setzen.

Die  $\tilde{U}_n(x)$  bilden ein Orthogonalsystem mit der Belegung  $\sqrt{1-x^2}$  im Intervall  $(-1, 1)$ , folglich bilden die Polynome  $D_n(\lambda)$  ein Orthogonalsystem mit der Belegung  $\sqrt{4pq - \lambda^2}$  im Intervall  $(-2\sqrt{pq}, 2\sqrt{pq})$ . Das bedeutet aber nach allgemeinen Sätzen über orthogonale Polynome, dass sämtliche  $n$  Nullstellen von  $D_n(\lambda)$  reell und einfach sind und im Intervall  $(-2\sqrt{pq}, 2\sqrt{pq})$  liegen.

Da man die Nullstellen der Tschebyscheffschen Polynome kennt, sie sind nämlich

$$x_k = \cos \frac{k\pi}{n+1} \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (16)$$

sind die Nullstellen der  $D_N(\lambda)$  wegen des Zusammenhangs (15) leicht anzugeben und berechnen sich nach Formel (9).

Weil nun, wegen  $r \geq 0$ ,  $p+q \leq 1$  ist, was bekanntlich auch  $2\sqrt{pq} \leq 1$  nach sich zieht, ist also 1 die einzige Wurzel von  $\Delta(\lambda)$  vom Betrage 1, das heisst,  $P$  ist schwach regelmässig.

Wir schreiben noch das Minimalpolynom  $\psi(\lambda)$  von  $P$  auf. Es ist:

$$\psi(\lambda) = (\lambda - 1) D_N(\lambda). \quad (17)$$

Den Ausdruck (6) für  $P^\infty$  wollen wir mit Hilfe der zu  $P$  adjungierten Matrix  $B(\lambda)$  umformen. Wegen  $B(\lambda) = (\lambda E - P)^{-1} \Delta(\lambda)$ , ist

$$C(\lambda) = \frac{B(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \psi(\lambda) = \frac{B(\lambda)}{(\lambda - 1)^2}. \quad (18)$$

Da

$$\psi'(\lambda) = D_N(\lambda) + (\lambda - 1) D'_N(\lambda), \quad (19)$$

wird

$$\psi'(1) = D_N(1) \neq 0. \quad (20)$$

Somit finden wir

$$P^\infty = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{B(\lambda)}{(\lambda - 1)^2 D_N(1)}. \quad (21)$$

Wir berechnen zunächst von  $P^\infty$  ein allgemeines Element  $p_{ij}^{(\infty)}$  mit  $i, j = 2, \dots, N + 1$ . Dazu benötigen wir das entsprechende Element  $b_{ij}$  der Matrix  $B(\lambda)$ , das bis aufs Vorzeichen mit derjenigen Determinante übereinstimmt, die aus  $\Delta(\lambda)$  durch Streichung der  $i$ -ten Spalte und  $j$ -ten Zeile hervorgeht. Da diese Determinante aber, wie man sofort sieht, den Faktor  $(\lambda - 1)^3$  enthält, wird wegen (20) und (21)

$$p_{ij}^{(\infty)} = 0 \quad \text{für} \quad i, j = 2, \dots, N + 1. \quad (22)$$

Ist

$$i = \begin{cases} 1 \\ N + 2, \\ N + 3 \end{cases}, \quad \text{aber} \quad j \neq \begin{cases} 1 \\ N + 2, \\ N + 3 \end{cases},$$

so entsteht aus  $\Delta(\lambda)$  durch Streichung der entsprechenden Spalte und Zeile eine Determinante, die eine Nullzeile enthält. Folglich ist allgemeiner

$$p_{ij}^{(\infty)} = 0 \quad \text{für} \quad j = 2, \dots, N + 1. \quad (23)$$

Wir betrachten nun nacheinander die Fälle  $j = 1$ ,  $j = N + 2$  und  $j = N + 3$ .

1.  $j = 1$ :

Ist  $i = 1$ , so findet man das entsprechende Element von  $B(\lambda)$  zu

$$b_{11}(\lambda) = (\lambda - 1)^2 D_N(\lambda),$$

also ist

$$p_{11}^{(\infty)} = 1. \quad (24)$$

Ist dagegen  $i = N + 2$  oder  $i = N + 3$ , so entstehen wieder Determinanten, die eine Zeile mit lauter Nullen besitzen, das heisst

$$p_{N+2,1}^{(\infty)} = p_{N+3,1}^{(\infty)} = 0. \quad (25)$$

Sei nun  $i = 2, \dots, N + 1$ , dann erhalten wir aus  $\Delta(\lambda)$  durch Streichen der ersten Zeile und  $i$ -ten Spalte das entsprechende Element von  $B(\lambda)$  zu:

$$b_{i1} = (-1)^{i-1} (\lambda - 1)^2 \left| \begin{array}{cccccccc} -p & \lambda & -q & 0 & . & . & 0 & \\ 0 & -p & \lambda & -q & & & . & \\ . & . & . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & -p & \lambda & -q & & \\ . & . & . & 0 & -p & \lambda & & \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & -p & -q \\ \hline & & & i-1 & & & \lambda & -q & 0 & . & . & 0 \\ & & & & & & -p & \lambda & -q & & . & \\ & & & & & & . & . & . & . & . & \\ & & & & & & . & . & . & . & . & \\ & & & & & & . & . & . & . & . & \\ & & & & & & . & . & -p & \lambda & -q \\ & & & & & & 0 & . & . & 0 & -p & \lambda \\ \hline & & & & & & & & & N-i+1 & & \end{array} \right|, \quad (26)$$

das heisst

$$b_{i1} = p^{i-1} (\lambda - 1)^2 D_{N-i+1}(\lambda), \quad (27)$$

woraus

$$p_{i1}^{(\infty)} = p^{i-1} \frac{D_{N-i+1}(1)}{D_N(1)} \quad (28)$$

folgt, oder mit Hilfe der Tschebyscheffschen Polynome ausgedrückt:

$$p_{i1}^{(\infty)} = \frac{1}{2^{i-1}} \left( \sqrt{\frac{p}{q}} \right)^{i-1} \frac{\tilde{U}_{N-i+1} \left( \frac{1}{2\sqrt{pq}} \right)}{\tilde{U}_N \left( \frac{1}{2\sqrt{pq}} \right)}. \quad (29)$$

2.  $j = N + 2$ :

Wie oben findet man

$$p_{1,N+2}^{(\infty)} = p_{N+3,N+2}^{(\infty)} = 0, \quad (30)$$

$$p_{N+2,N+2}^{(\infty)} = 1. \quad (31)$$

Sei nun  $i = 2, \dots, N + 1$ , so erhalten wir aus  $\Delta(\lambda)$  durch Streichen der  $N + 2$ -ten Zeile und  $i$ -ten Spalte

$$r_{+2} = (-1)^{N+2-i} (\lambda - 1)^2 \begin{vmatrix} \lambda & -q & 0 & . & . & 0 \\ -p & \lambda & -q & & & \\ . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & \\ . & & -p & \lambda & -q & \\ 0 & . & . & 0 & -p & \lambda \\ \hline & i-2 & & -p & -q & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ & & & \lambda & -q & 0 & & & & & \\ & & & -p & \lambda & -q & & & & & \\ & & & . & . & . & . & & & & \\ & & 0 & & . & . & . & . & & & \\ & & & . & & -p & \lambda & -q & 0 & & \\ & & & 0 & . & . & 0 & -p & \lambda & -q \\ \hline & & & & & & N-i+2 & & & & \end{vmatrix}, \quad (32)$$

also:

$$b_{i,N+2} = q^{N-i+2} (\lambda - 1)^2 D_{i-2}(\lambda). \quad (33)$$

Damit wird

$$p_{i,N+2}^{(\infty)} = q^{N-i+2} \frac{D_{i-2}(1)}{D_N(1)} \quad (34)$$

oder anders geschrieben:

$$p_{i,N+2}^{(\infty)} = \frac{1}{2^{N-i+2}} \left( \sqrt{\frac{q}{p}} \right)^{N-i+2} \frac{\tilde{U}_{i-1} \left( \frac{1}{2\sqrt{pq}} \right)}{\tilde{U}_N \left( \frac{1}{2\sqrt{pq}} \right)}. \quad (35)$$

3.  $j = N + 3$ :

Wie oben findet man

$$p_{1,N+3}^{(\infty)} = p_{N+2,N+2}^{(\infty)} = 0, \quad (36)$$

$$p_{N+3,N+3}^{(\infty)} = 1. \quad (37)$$

Der allgemeine Fall erledigt sich am schnellsten durch die Bemerkung, dass die Grenzmatrix stochastischer Matrizen wieder stochastisch ist, das heisst sämtliche Zeilensummen von  $P^\infty$  müssen gleich eins sein.

Daraus folgt:

$$p_{i,N+3}^{(\infty)} = 1 - p_{i1}^{(\infty)} - p_{i,N+2}^{(\infty)} \quad i = 2, \dots, N + 1, \quad (38)$$



$$\text{oder} \quad p_{i,N+2}^{(\infty)} = 1 - \frac{p^{i-1} D_{N-i+1}(1) + q^{N-i+2} D_{i-2}(1)}{D_N(1)} \quad (39)$$

Eine besonders einfache Form nehmen die Grenzwahrscheinlichkeiten in dem Fall an, dass entweder  $p$  oder  $q$  verschwindet.

Dann ist nämlich auf Grund von (8)

$$D_n(\lambda) = \lambda^n \quad \text{für } p, q = 0, \quad (40)$$

so dass für  $p = 0$

$$p_{i1}^{(\infty)} = 0, \quad p_{i,N+2}^{(\infty)} = q^{N-i+2}, \quad (41)$$

für  $q = 0$

$$p_{i1}^{(\infty)} = p^{i-1}, \quad p_{i,N+2}^{(\infty)} = 0 \quad (42)$$

gilt.

Andererseits wird der Fall häufig sein, dass  $p = q$  ist. Verschwindet zusätzlich  $r$ , so kommen wir wieder zu sehr einfachen Ausdrücken. Da dann  $p = q = 1/2$  ist, benötigen wir, wenn wir die Formeln (29) und (35) anwenden wollen, die Werte der Tschebyscheffschen Polynome an der Stelle  $x = 1$ .

Man kann sehr leicht ausrechnen, dass

$$\tilde{U}_n(1) = \frac{n+1}{2^n} \quad (43)$$

ist, womit wir aus (29) erhalten:

$$p_{i1}^{(\infty)} = \frac{N-i+2}{N+1} \quad (44)$$

und aus (35):

$$p_{i,N+2}^{(\infty)} = \frac{i-1}{N+1}. \quad (45)$$

Diese Formeln gestatten eine einfache und anschauliche Deutung: Wir denken uns, das System erstrebe den Zustand  $E_{N+2}$ . Dann benötigt es, um vom Zustand  $E_1$  aus auf geradem Wege sein Ziel zu erreichen,  $N+1$  Schritte. Befindet es sich bereits im Zustande  $E_i$ , so hat es gewissermassen schon  $i-1$  Schritte auf sein Ziel hin vollbracht. Die Wahrscheinlichkeit, das Ziel zu erreichen, wird dann durch den Quotienten aus der Zahl der bereits zurückgelegten Schritte und der Zahl der benötigten Schritte gemessen.

Wir wollen zum Abschluss noch eine für die numerische Auswertung zweckmässigere Schreibweise der Formeln (29) und (35) angeben.

Zu diesem Zwecke erinnern wir daran, dass die Tschebyscheffschen Polynome  $\tilde{U}_n(x)$ , die durch die Rekursionsvorschrift (13) offenbar für alle  $x$  erklärt sind, im Innern ihres Belegungsintervalls  $(-1, +1)$  eine zweite Darstellung besitzen. Es ist nämlich:

$$\tilde{U}_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\sin(n+1) \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \quad |x| \leq 1. \quad (46)$$

Die in dieser Darstellung zunächst geforderte Beschränkung auf den Bereich  $|x| \leq 1$  kann nicht wesentlich sein, da  $\tilde{U}_n(x)$  ein Polynom ist. Die entsprechende Erweiterung für  $x > 1$  ist leicht anzugeben zu:

$$\tilde{U}_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\sinh(n+1) \operatorname{Arch} x}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad x > 1. \quad (47)$$

Da mit Ausnahme des schon behandelten Falles  $p = q = 1/2$  stets  $1/2\sqrt{pq} > 1$  ist, müssen wir (47) benutzen und erhalten:

$$p_{i1}^{(\infty)} = \left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{i-1} \frac{\sinh\left\{(N-i+2) \operatorname{Arch} \frac{1}{2\sqrt{pq}}\right\}}{\sinh\left\{(N+1) \operatorname{Arch} \frac{1}{2\sqrt{pq}}\right\}}, \quad (48)$$

$$p_{i,N+2}^{(\infty)} = \left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^{N-i+2} \frac{\sinh\left\{(i-1) \operatorname{Arch} \frac{1}{2\sqrt{pq}}\right\}}{\sinh\left\{(N+1) \operatorname{Arch} \frac{1}{2\sqrt{pq}}\right\}}. \quad (49)$$

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] F. R. GANTMACHER, *Matrizenrechnung II*, S. 78–79 (Berlin 1959).  
 [2] I. P. NATANSON, *Konstruktive Funktionentheorie*, S. 304 (Berlin 1955).

#### Summary

Simple expressions are given for the asymptotic probabilities of a special homogeneous Markov chain which is important in some physical problems. For this purpose a theorem about stochastic matrices is used which allows to compute the « $\infty$ -th power» of such a matrix, if there exists no eigenvalue  $\lambda$  with  $\lambda \neq 1$ , but  $|\lambda| = 1$ . This condition is easy to verify, since a full survey of all eigenvalues can be obtained.

(Eingegangen: 27. März 1961.)

# The Deflection and Buckling of a Beam-Column with a One-Sided Constraint

By EDWARD E. ZAJAC, Murray Hill, New Jersey, USA<sup>1)</sup>

## Introduction

We consider the planar problem shown in Figure 1: A hinged beam with a central vertical load  $Q$  is compressed by a load  $P$ . However, the beam is constrained, say by a floor, so that it cannot deflect in the direction of the  $Q$ .



Figure 1  
Constrained beam-column.

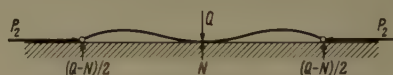


Figure 2  
Deflected shape for  $P = P_2$ .

Without the load  $Q$ , one knows that deflection can occur if the load  $P$  exceeds the Euler buckling load  $P_1$  for the pin-ended beam. But how much is this load raised by the presence of  $Q$ ? One might attack this problem from a static viewpoint in the standard way by asking for the lowest load  $P$  at which there is possible a nontrivial equilibrium configuration infinitesimally close to the straight configuration. This load and configuration are immediately apparent; namely, that shown in Figure 2, with a load  $P_2$  equal to the buckling load of a beam of half the span length hinged at one end and built-in at the other. The load  $P_2$  is 8.18 times higher than  $P_1$  regardless of how small  $Q$  is. Thus, using this approach, one would conclude that he could raise the buckling load by more than eightfold by applying an arbitrarily small transverse load  $Q$ .

On the other hand, for very small  $Q$  one expects that deflection of the rod will be possible for a load  $P$  near the pin-ended Euler load  $P_1$ . Hence, at the outset it appears that this problem may not be completely elementary. Indeed, we find first that the problem has several interesting features, which we investigate both by elementary beam theory and elastica theory. Secondly, we find that this problem is another example of what has been pointed out by ZIEGLER [1]<sup>2)</sup>, namely that the classical elastic stability criteria may lead to difficulties. In this case, the difficulty is of a different sort than that discussed

<sup>1)</sup> Bell Telephone Laboratories, Incorporated.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 546.

by ZIEGLER. We find that a meaningful stability criterion is a function not only of  $P$  and  $Q$  but of the amount of the disturbance as well.

### Solution by Elementary Beam Theory

By symmetry we have as the differential equation and boundary conditions for elementary beam theory

$$E I \frac{d^2 y}{dx^2} + P y = -\frac{(Q - N)}{2} x, \quad (1a)$$

$$y(0) = \frac{d^2 y(0)}{dx^2} = 0, \quad (1b)$$

$$\frac{dy(L)}{dx} = 0, \quad (1c)$$

where  $N$ , the reaction force of the floor at midspan (Figure 2), is zero for  $y(L) > 0$ . In addition we have the constraint condition  $y(x) \geq 0$  over the beam. The solution of Equation (1a) for the boundary conditions (1b, 1c) is

$$y = \frac{(Q - N)}{2 P q} \left( q x - \frac{\sin q x}{\cos q L} \right), \quad q^2 = \frac{P}{E I}. \quad (2a, b)$$

The constraint condition  $y(x) \geq 0$  gives

$$q x - \frac{\sin q x}{\cos q L} \geq 0.$$

The only positive value of  $\cos q L$  for which this is satisfied is  $\cos q L = 1$ , or  $q L = 2\pi, 4\pi, \dots$ , this corresponds to  $dy/dx = 0$  at  $x = 0$  and is of secondary interest. For negative  $\cos q L$ ,  $y(x) \geq 0$  if  $(\pi/2) \leq q L \leq \xi$ , where  $\xi = 4.493$  is the first root of  $\xi = \tan \xi$ . The value of  $q L = \pi/2$  corresponds to the Euler load  $P_1$  (pin-ended beam), while  $q L = \xi$  corresponds to  $P_2$  (pin-ended, built-in beam of half length). For  $q L < \xi$ ,  $y(L) > 0$  and  $N = 0$ . At  $q L = \xi$  ( $P = P_2$ ),  $y(L) = 0$  and  $N$  may have any value between zero and  $Q$ . For  $(\pi/2) \leq q L < \pi$  the deflection is of 'first mode' type, with an inflection point only at the hinge. For  $\pi < q L \leq \xi$ , it is of 'second mode' type, with an inflection point at the hinge and one between the hinge and the central load.

For  $q L > \xi$  the situation is more complicated. First, there is the case where the beam touches the floor at two points between hinges, shown in Figure 3.

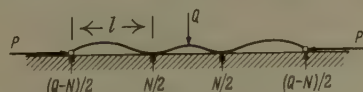


Figure 3

Possible deflected shape  $P > P_2$ .

Taking the deflection, slope, and moment to be continuous at the touchdown points, we find

$$y = \frac{(Q - N)}{2qP} \left( qx - \frac{\sin qx}{\cos \xi} \right), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$y = \frac{Q}{2qP} \left[ \tan \left( \frac{q(L-l)}{2} \right) (\cos q\xi - 1) + q\xi - \sin q\xi \right], \quad \begin{matrix} \xi = x - l, \\ l \leq x \leq L, \end{matrix}$$

where

$$ql = \xi, \quad Q - N = -Q \frac{\tan[q(L-l)/2]}{\tan \xi}.$$

The constraint condition  $y(x) \geq 0$  is satisfied only if  $Q - N \geq 0$ , which implies  $\tan [q(L-l)/2] \leq 0$ . The lowest values of  $qL$  that satisfy this condition are given by  $\pi + \xi \leq qL \leq 2\pi + \xi$ . Likewise, we may have higher modes of this type with more than two touchdown points.

On the other hand with  $qL > \xi$ , the beam may have no touchdown points between hinges. This is possible if  $\cos qL$  is negative and  $|\cos qL| \geq |\cos \xi|$ . The next values after  $qL = \xi$  to satisfy this condition are in the range

$$4\pi - \xi \leq qL \leq 2\pi + \xi.$$

Counting the hinge these contain three or four inflection points in  $0 \leq x \leq L$ . Again higher modes of this type, with still more inflection points, are possible. Further, in the entire range  $4\pi - \xi \leq qL \leq 2\pi + \xi$  one may have either zero or two touchdown points between hinges.

Hence elementary theory gives several interesting results. It indicates that deflections are possible for  $P \geq P_1$  in a range of  $P$  less than the first 'nontrivial load'  $P_2$ , but with the physically untenable result that  $y$  grows without bound, Equation (2a), for  $P \rightarrow P_1$ . This is not surprising. For the first order elementary theory the load  $P_1$  just equilibrates the bending moments at any cross section for any deflection if  $Q = 0$ . Hence, if  $Q \neq 0$  and  $P$  is in the neighborhood of  $P_1$ , we can expect that higher order effects will have to be considered. We note also that the spectrum of  $P$ 's for which equilibrium states are possible is neither discrete, as in a linear buckling problem, nor continuous, as in ordinary beam deflection. Rather it is disjoint. Equilibrium configurations exist for  $(\pi/2) \leq qL \leq \xi$  but do not exist for  $\xi < qL < 2\pi$ , or  $2\pi < qL < \pi + \xi$ , etc. Further, for  $(\pi/2) \leq qL \leq \xi$  it is seen that the deflection at midspan,

$$y_L = \frac{Q}{2Pq} (qL - \tan qL),$$

surprisingly decreases as  $P$  increases. This may be explained as an arching effect; as  $P$  increases a shallower and shallower arch is required to maintain equilibrium.



Some of these effects are due to the omission of higher order terms in elementary beam theory and some to the constraint  $y(x) \geq 0$ . For a closer look, we therefore turn to elastica theory, where we can conveniently take into account higher order terms. However, we shall restrict ourselves to the first two modes for the beam completely off the floor, or to a single touchdown point at midspan.

### Solution by Elastica Theory

For the inflectional case, we have the following equations to describe the elastica [2,3]:

$$\beta = L \sqrt{\frac{R}{EI}}, \quad (3a)$$

$$\beta \frac{s}{L} = F(\psi) - F(\psi_0), \quad (3b)$$

$$\zeta = 2 \sin^{-1}(k \sin \psi), \quad (3c)$$

$$\frac{x'}{L} = \frac{2}{\beta} [E(\psi) - E(\psi_0)] - \frac{s}{L}, \quad (3d)$$

$$\frac{y'}{L} = -\frac{2k}{\beta} \cos \psi = -\frac{1}{\beta^2} \frac{d\zeta}{ds}, \quad (3e)$$

where  $s$  is the arc length ( $s = 0$  at the hinge),  $(x', y')$  is a coordinate system directed along and normal to the resultant load  $R$  (Figure 4),  $\zeta$  is the angle

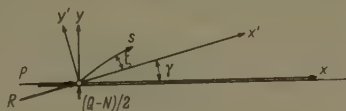


Figure 4  
Coordinates for the elastica.

made with the  $x'$  axes,  $k$  is the modulus of the elliptic functions  $F(\psi)$  and  $E(\psi)$ , and  $\psi$  is a parameter, with  $\psi_0 = \pi/2$  or  $-\pi/2$  corresponding to a positive or negative value of  $\xi$  at  $s = 0$ . At  $s = L$  we have the boundary condition

$$\zeta = -\gamma \quad \text{or} \quad k \sin \psi = -\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right), \quad (4a, b)$$

where  $\gamma$  is the angle which the resultant  $R$  makes with the horizontal. In addition, the  $x, y$  coordinates are given by

$$x = x' \cos \gamma - y' \sin \gamma, \quad (5a)$$

$$y = x' \sin \gamma + y' \cos \gamma. \quad (5b)$$

It is easily verified that  $\zeta = -\gamma$ , corresponding to  $dy/dx = 0$ , is the only negative value of  $\zeta$  at  $s = 0$  for which the constraint condition  $y(x) \geq 0$  can be satisfied. This case again is of secondary interest, and we focus attention on the case where  $\zeta > 0$  at  $s = 0$ . In these cases  $\varphi_0 = \pi/2$  and  $F(\varphi_0) = K$ ,  $E(\varphi_0) = E$  ( $K$  and  $E$  are complete elliptical integrals).

This problem is conveniently treated by means of a nomograph. We first define dimensionless loads by

$$\bar{P} = \frac{P}{P_1} = \frac{4\beta^2}{\pi^2} \cos \gamma, \quad \bar{G} = \frac{G}{P_1} = \frac{4\beta^2}{\pi^2} \sin \gamma,$$

where  $G = Q - N$ . Consider

$$\varphi_1 = \frac{\sin \gamma}{\bar{G}}, \quad \varphi_2 = \frac{\cos \gamma}{2\bar{P}}, \quad \varphi_3 = \frac{\pi^2}{8\beta^2}.$$

By virtue of Equations (4b) and (3b),  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , and  $\varphi_3$  are all functions of  $\sin \gamma$ . For constant  $\bar{G}$ ,  $\varphi_1$  versus  $\sin \gamma$  is a radial straight line, while for a constant  $\bar{P}$ ,  $\varphi_2$  versus  $\sin \gamma$  is an ellipse. For a constant  $k$ ,  $\varphi_3$  versus  $\sin \gamma$  has the appearance shown in Figure 5.

So, for example, given  $\bar{G}$  and  $\bar{P}$ , we first determine the intersection of the corresponding  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$  curves; then we determine the modulus  $k$  from the  $\varphi_3$  curve passing through the intersection, and the angle  $\gamma$  from the abscissa corresponding to the intersection. Having  $k$  and  $\gamma$ , the deflected shape is completely determined by Equations (3) and (5). In Figure 6 are shown graphs of the midspan deflections  $\gamma(L)$ , computed from Figure 5 and Equation (3e).

As in the elementary theory, we may identify 'modes' of deflected shapes. For a value at midspan  $\psi_L$  in the range  $(\pi/2) < \psi_L < (3\pi/2)$  there is only the inflection point at the support (first mode), for  $(3\pi/2) < \psi_L < (5\pi/2)$  there is one inflection point at the support and one in the span (second mode), etc. On Figure 5, the demarcation between the first two modes occurs at the maximum  $\sin \gamma$  value on the  $\varphi_3$  curves for  $k < \sin(\pi/4)$ . For  $k > \sin(\pi/4)$  it occurs at the minimum value of  $\sin \gamma$  lying between the two maxima at  $\sin \gamma = 1$ . At the demarcation values the midpoint of the beam is itself an inflection point.

Figures 5 and 6 allow one to trace the deflected shape as  $\bar{P}$  or  $\bar{Q}$  is held fixed and the other varied. For example, for  $\bar{G} = 1.0$  no deflection is possible for  $\bar{P}$  less than  $\bar{P}_{\min} \approx 1.25$ . At  $\bar{P} = \bar{P}_{\min}$  the midspan deflection is  $\gamma(L)/L \approx 0.4$  and consequently  $N = 0$ . Hence  $\bar{G} = 1.0$  corresponds to  $\bar{Q} = 1.0$ . Increasing  $\bar{P}$  above  $\bar{P}_{\min}$ , one moves along the radial line  $\bar{G} = 1.0$  on the nomograph toward the origin. Two deflections can exist for each  $\bar{P}$ . One corresponds to the upper branch of the  $\gamma(L)$  curve in Figure 6 (increasing  $k$ 's on the nomograph), and the other to the lower branch (initially decreasing  $k$ 's on the nomo-

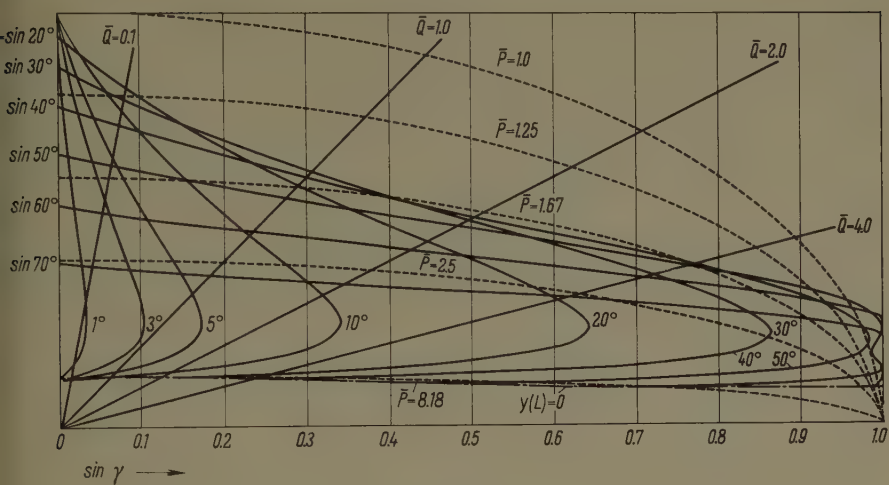


Figure 5  
Nomograph.

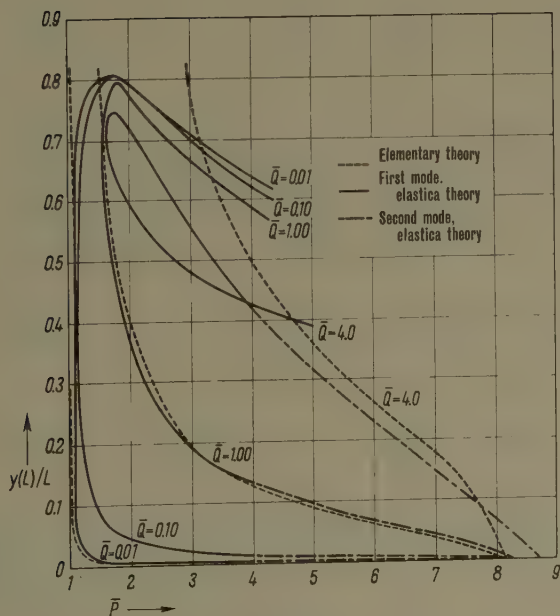


Figure 6  
Midspan deflection versus  $\bar{P}$ .

graph). The upper branch  $y(L)$  increases with increasing  $P$  until a maximum  $y(L)$  is reached. ( $y(L)$  further decreases because a loop is formed that tightens with increasing  $\bar{P}$ .) The lower branch  $y(L)$ , however, decreases with increasing  $\bar{P}$ , the behavior being similar to elementary theory. As  $\bar{P}$  further increases, this branch changes from a first mode to a second mode configuration (for  $k \approx \sin 3^\circ$ ). Finally at  $\bar{P} = 8.24$  it leads to  $y(L) = 0$  on Figure 6 and the  $y(L) = 0$  curve on the nomograph. Here a reaction force  $N$  is mobilized and  $\bar{G}$  becomes  $\bar{Q} - \bar{N}$ . On the nomograph, one may then move along the  $y(L) = 0$  zero line toward the left edge, thus going through a sequence of equilibrium states where  $\bar{N}$  goes from zero to  $\bar{Q}$  and  $\bar{P}$  from 8.24 to 8.18. Thus as  $\bar{P}$  is decreased from 8.24 one may either move along the abscissa or the  $\bar{Q} = 1.0$  curve in Figure 6. On the other hand, like elementary theory, elastica theory indicates a disjointness in the  $\bar{P}$  for this sequence of equilibrium states. One cannot go continuously along the lower branch  $\bar{Q} = 1.0$  curve to a value  $\bar{P} > 8.24$ . However, elastica theory does give upper branch values for  $\bar{P} > 8.24$ .

Thus, elastica theory differs from elementary theory. In particular, it indicates a bifurcation in the equilibrium states, while elementary theory, also shown in Figure 6 (dotted lines), does not. The curves typify a snap-through effect. That is, one expects that in the lower branch region a sufficient disturbance will snap the rod through the lower branch configuration into the upper branch.

### Stability of the Beam

The ideas involved in a discussion of the stability of the beam are conveniently illustrated by the finite-degree-of-freedom model shown in Figure 7. Torsional springs with spring rate  $c$  are placed at the joints within the span to provide resisting moments of the form  $c(\theta_2 - \theta_1)$ . Each rigid bar is of length  $2L/5$ .

Consider first only deflections that are symmetrical about midspan. These are described by two coordinates. For these we take normal coordinates  $q_1$  and  $q_2$  given by

$$\theta_1 = q_1 + q_2, \quad (6a)$$

$$\theta_2 = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2} q_1 - \frac{(\sqrt{5}+1)}{2} q_2. \quad (6b)$$

The coordinates  $q_1$  and  $q_2$  correspond to mode shapes that are analogous to  $\sin(\pi x/2L)$  and  $\sin(3\pi x/2L)$  for the continuous beam. The origin in a  $q_1, q_2$  plane corresponds to the straight configuration. In terms of  $q_1$  and  $q_2$  the potential energy  $V$  is given by

$$V = \alpha_1 q_1^2 + \alpha_2 q_2^2 + \beta_1 q_1 - \beta_2 q_2, \quad (7)$$

where

$$\alpha_1 = \frac{5(5-\sqrt{5})}{4} \left[ (3-\sqrt{5}) \frac{c}{2} - \frac{2PL}{5} \right],$$

$$\alpha_2 = \frac{5(5+\sqrt{5})}{4} \left[ (3+\sqrt{5}) \frac{c}{2} - \frac{2PL}{5} \right],$$

$$\beta_1 = \frac{QL(\sqrt{5}+1)}{10}, \quad \beta_2 = \frac{QL(\sqrt{5}-1)}{10}.$$

The loads  $P_1^* = 5(3-\sqrt{5})c/4$ ,  $P_3^* = 5(3+\sqrt{5})c/4$  are the analogs of the first and third Euler load for a simply supported beam. The constraint of the floor requires  $\theta_1 \geq 0$  and  $\theta_1 + \theta_2 \geq 0$ , or in terms of  $q_1$  and  $q_2$ :

$$q_1 + q_2 \geq 0, \quad (8a)$$

$$\beta_1 q_1 - \beta_2 q_2 \geq 0. \quad (8b)$$

We note that at the origin  $\text{grad } V = (\beta_1, -\beta_2)$  is a vector perpendicular to the line  $\beta_1 q_1 - \beta_2 q_2 = 0$  and pointing into the half plane defined by (8b). Hence, if one moves away from the origin in a direction such that  $\beta_1 dq_1 - \beta_2 dq_2 > 0$ , that is, so the load  $Q$  is raised off the floor, the potential energy increases *regardless* of the magnitude of  $P$ . On the other hand, if one moves away from the origin along the constraint line  $\beta_1 q_1 - \beta_2 q_2 = 0$ , then

$$dV = \left( \alpha_1 \frac{\beta_2^2}{\beta_2^2} + \alpha_2 \frac{\beta_1^2}{\beta_1^2} \right) dq_1^2 = \frac{25}{2} (3 + \sqrt{5}) \left[ \frac{5}{2} c - \frac{2PL}{5} \right] dq_1^2.$$

Thus, if  $P < P_2^* = 25c/4L$ , the potential energy along the constraint line increases, but if  $P > P_2^*$  it decreases. However, it is easily verified that  $P_2^*$  is just the load that holds the model in equilibrium with the center link on the floor and the side links off the floor. That is,  $P_2^*$  is the analog of the Euler load  $P_2$  for the hinged, built-in column.

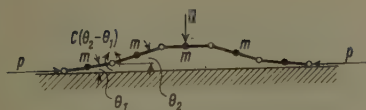


Figure 7

Finite-degree-of-freedom model.

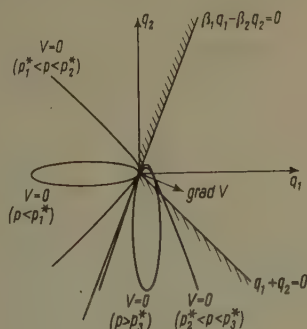


Figure 8

Geometry of the potential energy.



Geometrically, the situation is as shown in Figure 7. The constraint condition is satisfied in the closed region which is bounded by the lines  $\beta_1 q_1 - \beta_2 q_2 = 0$  and  $q_1 + q_2 = 0$  (to the right of the shaded area in Figure 8). The level lines  $V = \text{constant}$  are conic sections in the  $q_1, q_2$  plane. As  $P$  increases, the  $V = 0$  level line is first an ellipse, then a hyperbola, and finally an ellipse again. For  $P < P_2^*$ , the  $V = 0$  line through the origin lies entirely outside of the region satisfying the constraints; for  $P > P_2^*$  it is partly inside this region.

Further, it is readily seen that the above conclusions remain the same if one considers arbitrary deflections satisfying the constraints, rather than symmetric ones. Hence, by the energy criterion, as well as by the 'neighboring equilibrium' criterion, one would conclude that the critical load is raised to  $P_2^*$  by the presence of  $Q$ . Likewise, if one assigns a mass  $m$  to each rigid bar and assumes conservative impacts with the floor, the total energy of the model is conserved. If  $P < P_2^*$  and the initial deflections and velocities are sufficiently small, the kinetic energy is a positive definite function of  $\dot{q}_1, \dot{q}_2$  and the potential energy is a positive definite function of  $q_1, q_2$ . By the classical kinetic stability criterion, the critical load is thus also  $P = P_2^*$ .

In the case of the continuous beam, we may proceed in an exactly analogous way. We write  $y(x)$  in a set of normal coordinates  $q_1, q_2, \dots$ :

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \frac{n\pi x}{2L}.$$

The potential energy of the system is then

$$V = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ E I \left( \frac{n\pi}{2L} \right)^2 - P \right] \left( \frac{n\pi}{2L} \right)^2 q_n^2 + Q L q_n \sin \left( \frac{n\pi}{2} \right) \right\}.$$

At the origin in the  $(q_1, q_2, \dots)$  space (straight configuration)

$$dV = \frac{Q L^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} dq_n \sin \left( \frac{n\pi}{2} \right). \quad (9)$$

The constraint at midspan yields

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \left( \frac{n\pi}{2} \right) \geq 0. \quad (10)$$

Again, consider first moving from the origin in the  $(q_1, q_2, \dots)$  space in a direction that lifts the load  $Q$  off the floor. In this case, the inequality sign in (10) holds and by (9)  $dV > 0$ . Next, consider the case where  $Q$  remains touching the floor. By expanding in the eigenfunctions for a hinged, built-in column, it is easy to show that  $dV > 0$  for  $P$  below  $P_2$  (the Euler load for a hinged, built-in column), and  $dV < 0$  if  $P > P_2$ . Hence, by the classical 'neighboring equili-

equilibrium' and energy criteria the critical load is  $P_2$ . Likewise, it is readily seen that under a sufficiently small disturbance and with conservative impacts, oscillations near the straight configuration will remain bounded and small, and by the classical kinetic criterion the critical load is  $P_2$  as well.

Thus, the classical criteria all agree and, as mentioned at the outset, give a result which is physically unsatisfactory. How then is the critical load to be defined? From Figures 5 or 6, we see that for an above-the-floor deflection to exist at all,  $P$  must exceed  $P_{\min}$ . One can thus be safe if  $P < P_{\min}$ . However, except for very large  $Q$ ,  $P_{\min}$  is close to the Euler load  $P_1$  for a hinged bar, and is a very conservative criterion.

For sufficiently small  $\bar{Q}$  and large  $\bar{P}$ , the elementary theory is statically adequate for the lower branches of the  $y(L)$  curves in Figure 6, and we may investigate the local stability of these configurations by elementary means. Such an investigation by the classical methods shows that these configurations are locally unstable for  $P > P_1$ . Thus, in this range of  $\bar{P}$  and  $\bar{Q}$ , we have a continuous elastic system that is the analog of a particle which is at the bottom of a potential hill, but which is constrained so that it may only move uphill (Fig. 9). Under a sufficiently large disturbance, the particle may acquire enough energy to go over the top of the hill. For example, from Figure 6 we see that for  $\bar{Q} = 0.01$  and  $\bar{P} = 5$  the central deflections of the lower branch, locally unstable configuration is  $y(L) \approx 0.008 L$ . Hence, for a disturbance of this order of magnitude, there is a danger that the beam will snap through the locally unstable equilibrium configuration to a large deflection. Further, from Figure 6 we see that the magnitude of the disturbance required to send the rod into a large deflection configuration is arbitrarily small for arbitrarily small  $Q$ . In terms of the particle analogy, the height  $h$  of the hill decreases with decreasing  $Q$ . Thus, for small  $Q$ , one cannot conclude that the critical load is raised to  $P_2$ , unless the expected disturbance is correspondingly small.



Figure 9  
Single particle analog.

Likewise as  $Q$  is increased for fixed  $P$ , the height  $h$  of the hill increases. Thus, the load  $Q$  does in fact have a stabilizing effect. However, it is somewhat misleading to say that the effect is simply to raise the critical load as it is classically defined. Indeed, we see that a meaningful definition of the critical load  $P$  in this case must depend not only on the magnitude of  $Q$  but on the magnitude of the expected disturbance as well.

## REFERENCES

- [1] H. ZIEGLER, *Z. angew. Math. Phys.*, 4, 99 (1953).
- [2] A. E. H. LOVE, *Mathematical Theory of Elasticity* (Dover, New York, 1944).
- [3] E. P. POPOV, *Nonlinear Problems in the Statics of Thin Rods* (Gosud. Izdat. Tekh.-Teor. Lit., Moscow-Leningrad, 1948).

*Zusammenfassung*

Das Problem eines horizontalen, gelenkig gelagerten Stabes mit Vertikalkraft  $Q$  am Mittelpunkt und mit axialer Durchlast  $P$  wird behandelt. Eine Durchbiegung infolge  $Q$  wird jedoch durch eine Bodenebene verhindert. Die gekrümmten Formen des Stabes werden durch die lineare Stabtheorie und durch die Theorie der Elastika bestimmt. Die letztere ergibt eine Vergabelung der Gleichgewichtslagen, die in der linearen Theorie nicht erscheint. Schliesslich wird die Stabilität des geraden Stabes behandelt. Das kinetische Kriterium, das Energiekriterium und das klassische, auf nichttrivialen benachbarten Gleichgewichtslagen sich beziehende Kriterium werden alle in Betracht gezogen. Alle zeigen, dass eine beliebig kleine Vertikalkraft  $Q$  die kritische Durchlast  $P$  um mehr als das Achtfache erhöht. Das heisst,  $P$  geht von der Knicklast für den gelenkig gelagerten Stab über auf die Knicklast für den halblangen, einerseits eingebauten Stab. Es wird gezeigt, dass die klassischen Kriterien in diesem Falle irreführend sind. Nicht nur die Grösse von  $Q$ , sondern auch die der erwarteten Störung muss berücksichtigt werden.

(Received: December 27, 1960 resp. April 19, 1961.)

## On the Steady Flow of a Viscous Fluid Past a Sphere at Small Reynolds Numbers Using Oseen's Approximation

By PRABHU L. BHATNAGAR<sup>1)</sup> and PURUSHATTAM D. VERMA<sup>2)</sup>,  
Bangalore, India

### 1. Introduction

The first solutions of the linearized Navier-Stokes equation, which ignored the inertia terms for the problem of axi-symmetric flow round spheres, were given by STOKES (1851) [1]<sup>3)</sup>. OSEEN (1910) [2] took the inertia terms into account to a limited extent by assuming that the sphere caused a small perturbation in the uniform parallel flow and neglected second order perturbation velocities. GOLDSTEIN (1929) [3] solved OSEEN's equations exactly to find a series relationship between drag coefficient and Reynolds number  $R$ , which

<sup>1)</sup> Department of Applied Mathematics, Indian Institute of Science.

<sup>2)</sup> Permanent address: Rajasthan College, Jaipur (Rajasthan).

<sup>3)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 557.

compares favourably with experimental results for  $R < 2$ , but the predicted drag is about 10% higher than the experimental value at  $R = 5$ . He did not obtain an expression for the stream function from which it would be possible to plot the flow pattern. TOMOTIKA and AOI (1950) [4] discussed the steady flow past a sphere at low Reynolds number according to OSEEN's approximation. They discussed the flow patterns around a sphere by considering the flow at  $R = 2aU/\nu = 1$ , where  $U$  is the velocity of the undisturbed stream,  $a$  is the radius of the sphere and  $\nu$  is the kinematic viscosity and discovered the presence of a stationary vortex-ring behind the sphere. PEARCEY and MCHUGH (1955) [7] carried out the computations for the velocities at Reynolds numbers 1, 4 and 10. The conclusion of their study is that there is rudimentary evidence of a wake at Reynolds numbers even as low as 1, and a wake is definitely present at Reynolds numbers of 4 and 10. They found themselves in disagreement with TOMOTIKA and AOI, as they did not find a stationary vortex-ring behind the sphere; from their diagrams there were only the barest of hints that it would ultimately appear. They drew the non-dimensional graph of fluid velocity in radial and angular directions. Since they did not find the stream function they could not present the streamline patterns. Their calculations are based on the analytic expressions obtained by GOLDSTEIN.

A finite difference method was used by KAWAGUTI (1950) [5] to solve the Navier-Stokes equation for the flow round spheres at  $R = 20$ . He found that reversal of flow does not occur on the surface, so that a standing vortex ring does not appear for  $R = 20$ . This method is extremely laborious but has been replaced by LISTER (1953) [6] by a relaxation method to compute the flow round spheres at  $R = 0, 1, 10$  and  $20$ . Recently JENSON (1959) [8] has applied this method to spheres at  $R = 5, 10, 20$  and  $40$  using a different coordinate system. He has discussed the phenomenon of separation of the forward flow and development of a circulating wake. He reported the first formation of a wake at  $R = 17$ .

It is of interest to examine at what stage of increasing Reynolds number a clearly defined wake gets established and to see if the vortex is present. The main object of the present paper lies in determining the correct general expression for the Stokes type stream function for the purpose of computing the flow patterns around the sphere. For convenience the essential parts of GOLDSTEIN's analysis necessary for our investigation are first reproduced as briefly as possible and then the expression for the Stokes stream function will be obtained. The detailed computations have been carried out for the flow pattern around a uniformly translated sphere at Reynolds numbers, 1, 4 and 10. This choice of Reynolds numbers is made in order to compare the results obtained previously by the different authors and to use the values of the coefficients  $A_n$  and  $B_n$  already obtained precisely by PEARCEY and MCHUGH on IBM type punch-card machines using GOLDSTEIN's analytical expressions.

We find that the disagreement of PEARCEY and MCHUGH with TOMOTIKA and AOI is probably not due to the truncation of the series at  $n = 1$  but may be due to the incorrect Stokes stream functions obtained by TOMOTIKA and AOI by integrating only the radial component of velocity. This expression for the stream function does not satisfy the angular component of the velocity. A general expression for the Stokes stream function has been obtained and on detailed computation it has been found that there is no separation of the flow at  $R = 1$  and  $R = 4$ , while at  $R = 10$  the flow is separated and the vortices are attached. It is expected that these vortices will be detached as the Reynolds number increases.

## 2. The General Expression for the Stokes Stream Function

Let  $ox$ ,  $oy$ ,  $oz$  be rectangular coordinate axes having the origin  $O$  at the centre of the sphere which is at rest in a steadily running stream of incompressible viscous fluid of infinite extent. We assume that the fluid at infinity flows with constant velocity  $U$  in the positive direction of the axis of  $x$ . Then the components of fluid velocity at any point may be written as  $U + u$ ,  $v$ ,  $w$  where  $u$ ,  $v$ ,  $w$  are the components of the velocity of perturbation produced by the obstacle which become vanishingly small everywhere at a great distance from the body. In the absence of external forces the Navier-Stokes equations of motion are

$$\rho \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mu \nabla^2 \mathbf{q} - \rho U \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} - \nabla p,$$

$\mathbf{q}$  is the velocity vector with components  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Neglecting the inertia term we get the linearized equations of motion of OSEEN:

$$\rho U \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} = \mu \nabla^2 \mathbf{q} - \nabla p, \quad (1)$$

with this we combine the equation of continuity

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0. \quad (2)$$

Let us write  $U = 2k\nu$ , and it is found that OSEEN's hydrodynamical equations are satisfied by

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \chi, \\ v &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial y}, \\ w &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$



and

$$p = \rho U \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (4)$$

provided that

$$\nabla^2 \chi - 2k \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

and

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (6)$$

Introducing the spherical polar coordinates  $(r, \theta, w)$ , the appropriate general solution of equation (5) for the case of sphere of radius  $a$ , is given by

$$\chi = U e^{\mu \xi} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \chi_n(\xi) P_n(\mu), \quad (7)$$

where the  $B_n$ 's are constants of integration and

$$\xi = kr, \quad \mu = \cos \theta,$$

and

$$\chi_n(\xi) = (2n+1) \left( \frac{\pi}{2\xi} \right)^{1/2} K_{n+1/2}(\xi), \quad (8)$$

where  $K_{n+1/2}(\xi)$  denotes the modified Bessel function and  $P_n(\mu)$  denotes the Legendre function.

The general solution of equation (6) is given by

$$\Phi = U \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A'_n P_n(\mu)}{r^{n+1}}, \quad (9)$$

where the  $A'_n$ 's are constants of integration.

Taking  $v_r$ ,  $v_\theta$ , and  $v_w$  the velocity components in the direction of  $r$ ,  $\theta$  and  $w$  increasing, we get

$$\begin{aligned} v_r &= -\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{2k} \frac{\partial \chi}{\partial r} - \chi \cos \theta, \\ v_\theta &= \frac{\sin \theta}{r} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \mu} - \frac{1}{2K} \frac{\partial \chi}{\partial \mu} + \chi r \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

and  $v_w = 0$ .

In order to compute the flow patterns around the sphere we shall now find the general expression for the stream function  $\psi$  which is connected with the components of velocity by the relations,

$$v_r = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \mu}, \quad (11)$$

and

$$v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (12)$$

where  $\psi$  is the Stokes stream function.

Substituting for the components of velocity  $v_r$  and  $v_\theta$  from (10) and subsequently the values of  $\chi$  and  $\phi$  from (7) and (9), we have

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mu} = -U \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A'_n (n+1) K^n P_n(\mu)}{\xi^n} - \frac{U \xi^2}{2 k^2} e^{\mu \xi} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \{ \chi'_n(\xi) - \mu \chi_n(\xi) \} P_n(\mu), \quad (13)$$

and

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -U \sin^2 \theta \sum_{n=0}^{\infty} A'_n \frac{K^n P'_n(\mu)}{\xi^{n+1}} + \frac{U \sin^2 \theta}{2 k^2} e^{\mu \xi} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \{ P'_n(\mu) - \xi P_n(\mu) \} \chi_n(\xi). \quad (14)$$

Now,

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} d\xi. \quad (15)$$

Substituting the corresponding expressions for  $\partial \psi / \partial \mu$  and  $\partial \psi / \partial \xi$  from (13) and (14) in (15) and integrating, we find the general expression for  $\psi$ :

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) A'_n}{(2n+1) r^n} \{ P_{n-1}(\mu) - P_{n+1}(\mu) \} - \frac{U \pi}{4 k^2} (1 - \mu^2) e^{-\xi(1-\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) B_n \left( \sum_{r=0}^n \frac{\phi_{n,r}(\mu)}{\xi^r} \right) + c, \quad (16)$$

where  $c$  is a constant of integration and  $\phi$ 's are given by the following set of equations

$$\phi_{n,0}(\mu) = -\frac{P_n(\mu)}{1-\mu},$$

$$\phi_{n,1}(\mu) = \frac{1}{1-\mu} \left[ P'_n(\mu) - \frac{(n+1)!}{(n-1)!} \frac{P_n(\mu)}{2} \right],$$

$$(1-\mu) \phi_{n,2}(\mu) + \phi_{n,1}(\mu) = \left[ \frac{(n+1)!}{(n-1)!} \frac{P'_n(\mu)}{2} - \frac{(n+2)!}{2! (n-2)!} \frac{P_n(\mu)}{2^2} \right],$$

$$(1-\mu) \phi_{n,3}(\mu) + 2 \phi_{n,2}(\mu) = \left[ \frac{(n+2)!}{2! (n-2)!} \frac{P'_n(\mu)}{2^2} - \frac{(n+3)!}{3! (n-3)!} \frac{P_n(\mu)}{2^3} \right],$$

$$(1-\mu) \phi_{n,4}(\mu) + 3 \phi_{n,3}(\mu) = \left[ \frac{(n+3)!}{3! (n-3)!} \frac{P'_n(\mu)}{2^3} - \frac{(n+4)!}{4! (n-4)!} \frac{P_n(\mu)}{2^4} \right],$$

.....

$$(1-\mu) \phi_{n,n}(\mu) + (n-1) \phi_{n,n-1}(\mu) = \left[ \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} \frac{P'_n(\mu)}{2^{n-1}} - \frac{(2n)!}{n!} \frac{P_n(\mu)}{2^n} \right],$$

and

$$n \phi_{n,n}(\mu) = \frac{(2n)!}{n!} \frac{P'_n(\mu)}{2^n}. \quad (17)$$

The constant of integration  $c$ , can be evaluated if we denote by  $\psi = 0$  the particular stream line which coincides with the axis of symmetry  $\mu = \pm 1$ .

The corresponding stream function for the steady flow past a fixed sphere in an infinitely extended fluid can easily be obtained by adding to the right-hand side the stream function for the uniform flow, which is given by

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \theta, \\ &= \frac{1}{2} U r^2 (1 - \mu^2).\end{aligned}$$

Thus, the required general expression for the stream function is

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{2} U r^2 (1 - \mu^2) + U \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(2n+1)} \frac{A'_n}{r^n} \{P_{n-1}(\mu) - P_{n+1}(\mu)\} \\ &\quad - \frac{U \pi}{4 k^2} (1 - \mu^2) e^{-\xi(1-\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) B_n \left( \sum_{r=0}^n \frac{\phi_{n,r}(\mu)}{\xi^r} \right) + c.\end{aligned}\quad (18)$$

If we write  $\psi_1 = \psi/U a^2$ ,  $r_1 = r/a$ , and  $\xi = R r_1/4$ , the general expression for the non-dimensional stream function  $\psi_1$  becomes

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{1}{2} r_1^2 (1 - \mu^2) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(2n+1)} \frac{A_n}{r_1^n} \{P_{n-1}(\mu) - P_{n+1}(\mu)\} \\ &\quad - \frac{4 \pi}{R^2} (1 - \mu^2) e^{-(R/4)r_1(1-\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) B_n \left( \sum_{r=0}^n \frac{\phi_{n,r}(\mu)}{(R r_1/4)^r} \right) + c,\end{aligned}\quad (19)$$

where the Reynolds number  $R = U d/\nu$  is determined by

$$\xi_0 = k a = \frac{1}{4} R. \quad (20)$$

### 3. The Coefficients $A_n$ and $B_n$

The boundary conditions are

$$v_r = -U \cos \theta, \quad \text{and} \quad v_\theta = U \sin \theta, \quad \text{at} \quad r = a.$$

On applying the boundary conditions we get the Goldstein equations for finding the coefficients  $A_n$  and  $B_n$ :

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)}{a^{n+2}} A_n + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \{ \chi'_m(\xi_0) \psi_{n,m}(\xi_0) - \chi_m(\xi_0) \psi'_{n,m}(\xi_0) \} \\ = \begin{cases} -1 & (n=1) \\ 0 & (n=0, 2, 3, \dots) \end{cases},\end{aligned}\quad (21)$$

and

$$\frac{A'_n}{a^{n+2}} - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} B_m \left\{ \frac{\chi_m(\xi_0)}{\xi_0} X_{n,m}(\xi_0) - \chi_m(\xi_0) \Phi_{n,m}(\xi_0) \right\} = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 0 & (n=2, 3, \dots) \end{cases} \quad (22)$$

Eliminating  $A'_n$ 's from equations (21) and (22), we have

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_m \lambda_{n,m}(\xi_0) = \begin{cases} -6 & (n=1) \\ 0 & (n>1) \end{cases}, \quad (23)$$

where

$$\lambda_{n,m}(\xi_0) = \chi'_m(\xi_0) \psi_{n,m}(\xi_0) - \chi_m(\xi_0) \psi'_{n,m}(\xi_0) + \frac{(n+1) \chi_m(\xi_0)}{\xi_0} \{X_{n,m}(\xi_0) - \xi_0 \Phi_{n,m}(\xi_0)\}. \quad (24)$$

The detailed computations are carried out by PEARCEY and MCHUGH for determining the values of  $A_n$  and  $B_n$  on IBM-type punch card machines for  $R = 1, 4$  and  $10$ . They retained 10 significant figures, and extending to  $n = 8$ ,  $m = 7$  for  $R = 1$ , to  $n = 9$ ,  $m = 8$  for  $R = 4$ , and to  $n = 10$ ,  $m = 9$  in the case  $R = 10$ . The values of  $A_n$  and  $B_n$  obtained by them are used with necessary modifications in the computation of the flow patterns for the Reynolds numbers 1, 4 and 10.

Table 2. Values of  $\psi$

$\mu \backslash r_1$	1.02	1.04	1.06	1.08	1.10	1.20
0.5					+ 2.94996	+ 2.96694
0.6					+ 2.13874	+ 2.15837
0.7					+ 1.20913	+ 1.22909
0.8	+ 0.81875	+ 0.81986	+ 0.82129	+ 0.82296	+ 0.82710	+ 0.83925
0.82	+ 0.74027	+ 0.74128	+ 0.74256	+ 0.74412	+ 0.74788	+ 0.75890
0.84	+ 0.66104	+ 0.66192	+ 0.66305	+ 0.66444	+ 0.66785	+ 0.67777
0.86	+ 0.58101	+ 0.58180	+ 0.58280	+ 0.58404	+ 0.58709	+ 0.59584
0.88	+ 0.50026	+ 0.50093	+ 0.50181	+ 0.50286	+ 0.50552	+ 0.51310
0.90	+ 0.41907	+ 0.41963	+ 0.42035	+ 0.42123	+ 0.42320	+ 0.42956
0.92	+ 0.33676	+ 0.33823	+ 0.33782	+ 0.33852	+ 0.34014	+ 0.34526
0.94	+ 0.25372	+ 0.25406	+ 0.25448	+ 0.25506	+ 0.25626	+ 0.26012
0.96	+ 0.16992	+ 0.17009	+ 0.17041	+ 0.17077	+ 0.17161	+ 0.17421
0.98	+ 0.08528	+ 0.08549	+ 0.08558	+ 0.08583	+ 0.08619	+ 0.08748
0.99	+ 0.04274	+ 0.04280	+ 0.04288	+ 0.04299	+ 0.04302	+ 0.04378
0.995	+ 0.02251	+ 0.02256	+ 0.02259	+ 0.02264	+ 0.02296	+ 0.02306
0.999	+ 0.00542	+ 0.00542	+ 0.00542	+ 0.00542	+ 0.00544	+ 0.00551
0.9995	+ 0.00270	+ 0.00270	+ 0.00270	+ 0.00270	+ 0.00270	+ 0.00275

4. Computation of the Flow Patterns

Keeping in view the aim of the present investigation, detailed numerical calculations have been carried out using the general expression of Stokes stream function (19) in the range  $\mu = 1$  to  $\mu = 0.5$  and  $r = 1$  to  $r_1 = 2$  for  $R = 1, 4$  and  $10$ . The tables of results (2 to 4) give the values of  $\psi$  to five decimal places. They have been rounded off to two decimal places and plotted on a graph. Finally the contours of equal values of  $\psi$  are drawn.

Table 1  
Values of the coefficients  $A_n$  and  $B_n$  for  $R = 1, 4$  and  $10$

<i>R</i>	1		4		10	
<i>n</i>	<i>A<sub>n</sub></i>	<i>B<sub>n</sub></i>	<i>A<sub>n</sub></i>	<i>B<sub>n</sub></i>	<i>A<sub>n</sub></i>	<i>B<sub>n</sub></i>
0	+3.52627	+0.29563	+1.21748	+2.77817	+0.71690	+64.05506
1	+0.45078	−0.00504	+0.37926	−0.45035	+0.32761	−28.48695
2	+0.00222	+0.00002	+0.01519	+0.02555	+0.03363	+9.49657
3	−0.00002	−0.03712×10 <sup>−6</sup>	−0.00132	−0.00007	−0.00402	−0.85221
4			+0.00009	+0.00001	+0.00022	+0.07154
5					−0.00001	−0.00396
6						+0.00016

for  $R = 1$

1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00
+2.99752	+3.04059	+3.09512	+3.16051	+3.23624	+3.32183	+3.41699	+3.52151
+2.18941	+2.23094	+2.28214	+2.34247	+2.41149	+2.48884	+2.57422	+2.66752
+1.25805	+1.29524	+1.34006	+1.39209	+1.45092	+1.51633	+1.58807	+1.66603
+0.86134	+0.88560	+0.91883	+0.95345	+0.99471	+1.04058	+1.09265	+1.14549
+0.77898	+0.80104	+0.83120	+0.86270	+0.90180	+0.94183	+0.98917	+1.03719
+0.69578	+0.71554	+0.74263	+0.77088	+0.80598	+0.84190	+0.88438	+0.92746
+0.61173	+0.62920	+0.65311	+0.67804	+0.70908	+0.74078	+0.77831	+0.81638
+0.52685	+0.54196	+0.56265	+0.58421	+0.61103	+0.63849	+0.67097	+0.70387
+0.44116	+0.45385	+0.47123	+0.48937	+0.51197	+0.53500	+0.56233	+0.59000
+0.35459	+0.36482	+0.37888	+0.39353	+0.41174	+0.43036	+0.45241	+0.47473
+0.26717	+0.27494	+0.28559	+0.29667	+0.31047	+0.32455	+0.34123	+0.35814
+0.17898	+0.18418	+0.19132	+0.19877	+0.20803	+0.21757	+0.22869	+0.24011
+0.08986	+0.09247	+0.09620	+0.09994	+0.10458	+0.10934	+0.11498	+0.12069
+0.04489	+0.04630	+0.04801	+0.04999	+0.05224	+0.05474	+0.05747	+0.06045
+0.02363	+0.02433	+0.02519	+0.02617	+0.02732	+0.02855	+0.02994	+0.03142
+0.00562	+0.00577	+0.00594	+0.00614	+0.00637	+0.00662	+0.00689	+0.00719
+0.00284	+0.00288	+0.00294	+0.00306	+0.00321	+0.00330	+0.00342	+0.00359



Table 3. Values of  $\psi$ 

$\mu \backslash r_1$	1.02	1.04	1.06	1.08	1.10	1.20
0.5					+1.07049	+1.10561
0.6					0.88085	0.91132
0.7					0.68113	0.70587
0.8	+0.45559	+0.45789	+0.46040	+0.46314	0.46786	0.48401
0.82	0.41167	0.41384	0.41609	0.41863	0.42301	0.43778
0.84	0.36738	0.36929	0.37141	0.37368	0.37760	0.39099
0.86	0.32258	0.32431	0.32618	0.32832	0.33180	0.34370
0.88	0.27733	0.27887	0.28056	0.28235	0.28555	0.29598
0.90	0.23174	0.23318	0.23456	0.23621	0.23873	0.24767
0.92	0.18591	0.18697	0.18829	0.18950	0.19176	0.19880
0.94	0.13971	0.14067	0.14166	0.14245	0.14414	0.14978
0.96	0.09350	0.09391	0.09475	0.09522	0.09653	0.10011
0.98	0.04674	0.04737	0.04723	0.04787	0.04796	0.05061
0.99	0.02424	0.02455	0.02488	0.02521	0.02554	0.02584
0.995	+0.01053	+0.01063	+0.01069	+0.01079	+0.01090	+0.01141

Table 4. Values of  $\psi$ 

$\mu \backslash r_1$	1.02	1.04	1.06	1.08	1.10	1.20
0.5					-0.55939	-0.47958
0.6					-0.71008	-0.63509
0.7					-0.81539	-0.75187
0.8	-0.84987	-0.84006	-0.83013	-0.82088	-0.80965	-0.76748
0.82	-0.82392	-0.81524	-0.80635	-0.79767	-0.78762	-0.75031
0.84	-0.78817	-0.78012	-0.77233	-0.76473	-0.75591	-0.72309
0.86	-0.74147	-0.73463	-0.72801	-0.72155	-0.71404	-0.68566
0.88	-0.68356	-0.67795	-0.67254	-0.66728	-0.66112	-0.63791
0.90	-0.61112	-0.60670	-0.60246	-0.59831	-0.59347	-0.57501
0.92	-0.52471	-0.52133	-0.51809	-0.51492	-0.51117	-0.49831
0.94	-0.43499	-0.41783	-0.41781	-0.41508	-0.41195	-0.40336
0.96	-0.29980	-0.29839	-0.29710	-0.29579	-0.29426	-0.28919
0.98	-0.16506	-0.16445	-0.16391	-0.16340	-0.16272	-0.16067
0.99	-0.07559	-0.07535	-0.07514	-0.07490	-0.07473	-0.07366
0.995	-0.05849	-0.05797	-0.05746	-0.05695	-0.05648	-0.05406

## 5. Discussion

The streamlines are sketched in Figures 1 to 3 for  $R = 1, 4$  and 10. The most striking feature of these patterns of flow is that at  $R = 1$  and 4, there is no separation of the flow. The flow is approximately symmetrical. The streamlines show the change in flow pattern with increasing Reynolds number. The actual changes in appearance are very slight. This is in disagreement with the results reported by TOMOTIKA and AOI (1950) [4]. PEARCEY and MCHUGH (1955) [7] reported a strongly marked wake even at the lowest Reynolds number, namely  $R = 1$ . The stream lines in Figure 3 shows a separation of the

for  $R = 4$ 

1-30	1-40	1-50	1-60	1-70	1-80	1-90	2-00
+ 1.15356	+ 1.21347	+ 1.28461	+ 1.36646	+ 1.45857	+ 1.56063	+ 1.67233	+ 1.79349
0.95232	1.00308	1.06316	1.13211	1.20960	1.29541	1.38934	1.49114
0.73855	0.77857	0.82582	0.87982	0.94051	1.00768	1.08117	1.16076
0.50887	0.53523	0.56991	0.60565	0.64777	0.69424	0.74688	0.80015
0.46049	0.48448	0.51596	0.54843	0.58817	0.62862	0.67638	0.72461
0.41151	0.43298	0.46129	0.49032	0.52589	0.56213	0.60486	0.64795
0.36191	0.38083	0.40584	0.43148	0.46282	0.49476	0.53238	0.57031
0.31165	0.32817	0.34973	0.37188	0.39890	0.42641	0.45886	0.49171
0.26097	0.27473	0.29289	0.31156	0.33418	0.35740	0.38451	0.41197
0.20975	0.22086	0.23558	0.25056	0.26886	0.28737	0.30936	0.33130
0.15803	0.16653	0.17762	0.18889	0.20268	0.21662	0.23301	0.24981
0.10583	0.11131	0.11891	0.12625	0.13568	0.14521	0.15637	0.16725
0.05336	0.05620	0.05989	0.06367	0.06826	0.07291	0.07842	0.08394
0.02794	0.02867	0.03123	0.03245	0.03546	0.03713	0.04058	0.04268
+ 0.01209	+ 0.01286	+ 0.01375	+ 0.01478	+ 0.01588	+ 0.01714	+ 0.01845	+ 0.01993

for  $R = 10$ 

1-30	1-40	1-50	1-60	1-70	1-80	1-90	2-00
- 0.39603	- 0.30716	- 0.21162	- 0.10887	+ 0.00154	+ 0.12001	+ 0.24661	+ 0.38134
- 0.55920	- 0.48055	- 0.39748	- 0.30865	- 0.21502	- 0.11480	- 0.00789	- 0.10553
- 0.68947	- 0.62595	- 0.56040	- 0.49143	- 0.41831	- 0.34075	- 0.25838	- 0.17121
- 0.72320	- 0.68327	- 0.63874	- 0.59594	- 0.54937	- 0.49979	- 0.44497	- 0.39065
- 0.71088	- 0.67543	- 0.63632	- 0.59861	- 0.55581	- 0.51401	- 0.46634	- 0.41832
- 0.68940	- 0.65855	- 0.62512	- 0.59269	- 0.55557	- 0.52013	- 0.47842	- 0.43781
- 0.65726	- 0.63190	- 0.60347	- 0.57644	- 0.54512	- 0.51531	- 0.48057	- 0.44685
- 0.61363	- 0.59283	- 0.57030	- 0.54872	- 0.52435	- 0.49891	- 0.47135	- 0.44349
- 0.55667	- 0.53985	- 0.52315	- 0.50679	- 0.48660	- 0.46763	- 0.44587	- 0.42497
- 0.48556	- 0.47334	- 0.45998	- 0.44819	- 0.43459	- 0.42207	- 0.40522	- 0.38907
- 0.39486	- 0.38542	- 0.37804	- 0.36896	- 0.36146	- 0.35186	- 0.34357	- 0.33286
- 0.28405	- 0.28004	- 0.27542	- 0.27149	- 0.26654	- 0.26204	- 0.25627	- 0.25084
- 0.15861	- 0.15719	- 0.15552	- 0.15416	- 0.15235	- 0.15074	- 0.14856	- 0.14660
- 0.07304	- 0.07235	- 0.07171	- 0.07129	- 0.07065	- 0.06994	- 0.06917	- 0.06830
- 0.05172	- 0.04943	- 0.04720	- 0.04496	- 0.04272	- 0.04042	- 0.03810	- 0.03572

flow at  $R = 10$  and the presence of attached vortices. The most reliable experimental value for the separation of the flow is  $R = 14$  as given by GARNER, JENSON and KEEY (1959) [9]. It is expected that the vortex will gain strength as the Reynolds number increases and finally it will get detached. JENSON (1959) [8] obtained the separation of the flow at  $R = 17$ , by a relaxation process for flow past a sphere within a pipe. However, the present investigation predicts the existence of the separation of flow even at  $R = 10$ . Critical Reynolds numbers for the separation of flow and for the vortices which become detached are under investigation.

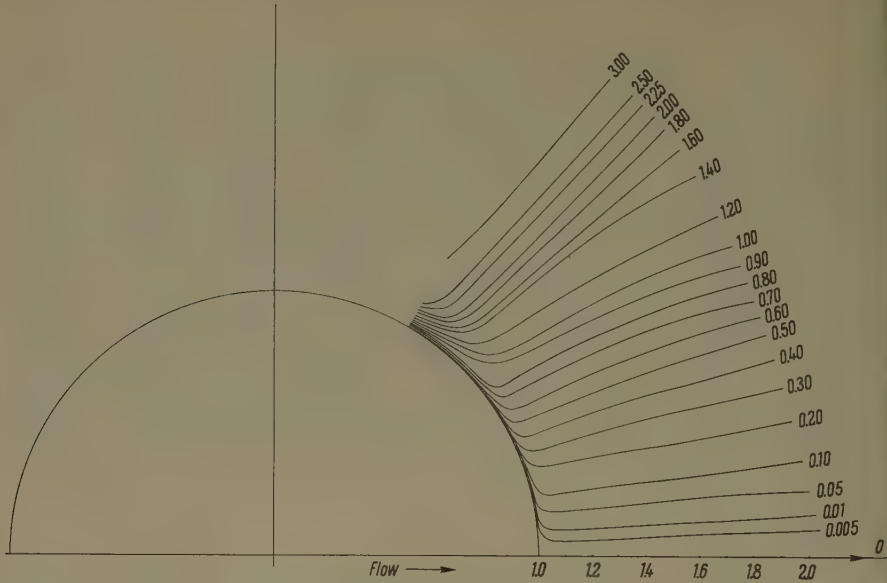


Figure 1  
Calculated stream-lines past a sphere at  $R = 1$ .

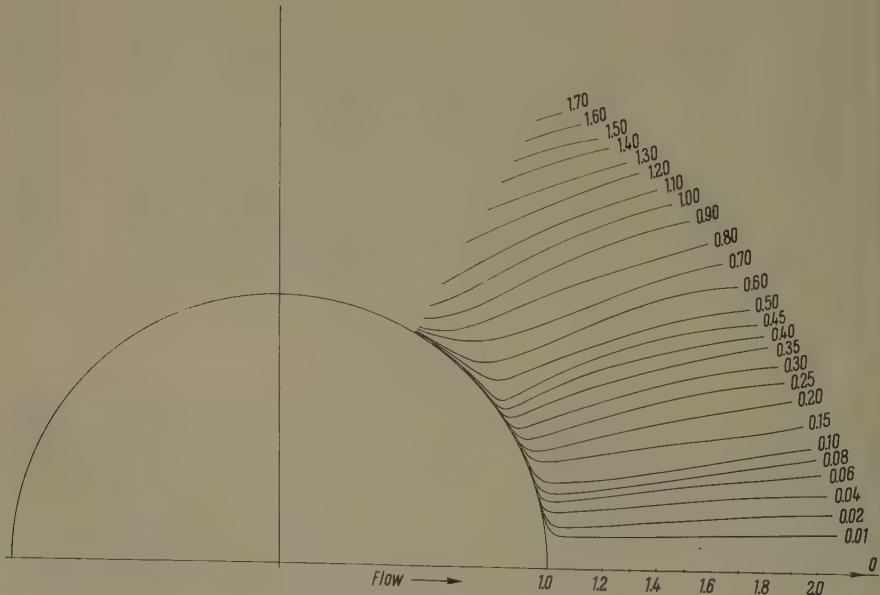


Figure 2  
Calculated stream-lines past a sphere at  $R = 4$ .

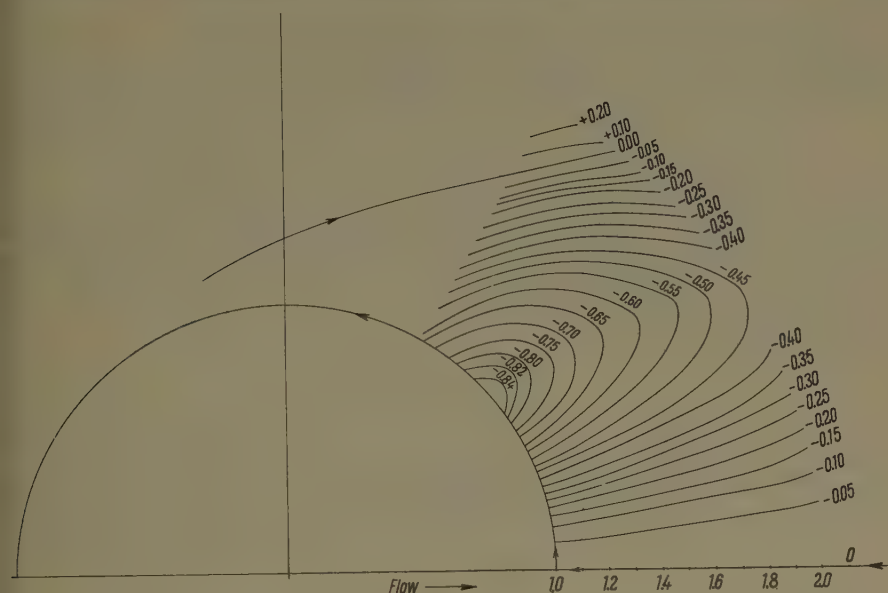


Figure 3  
Calculated stream-lines past a sphere at  $R = 10$ .

### Acknowledgement

One of us (P. D. VERMA) is grateful to the authorities of Indian Institute of Science, Bangalore, for granting him permission to work at the Institute as a Short-time worker and for providing all necessary facilities.

### REFERENCES

- [1] G. G. STOKES, *On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums*, Trans. Camb. Phil. Soc., IX, 8 (1851).
- [2] C. W. OSEEN, *Über die Stokessche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik*, Arkiv for matematik, astronomi och fysik, 6, No. 29 (1910).
- [3] S. GOLDSTEIN, *The Steady Flow of Viscous Fluid Past a Fixed Spherical Obstacle at Small Reynolds Numbers*, Proc. Roy. Soc. A, 123, 225-235 (1929).
- [4] S. TOMOTIKA and T. AOI, *The Steady Flow of Viscous Fluid Past a Sphere and Circular Cylinder at Small Reynolds Numbers*, Quart. Journal of Mech. and Applied Math., 3, 2, 140-161 (1950).
- [5] M. KAWAGUTI, *Numerical Solution for the Viscous Flow Past a Sphere*, Rept. Inst. Sci. Technol. Tokyo, 4, 5-6, 154-158 (1950).
- [6] M. LISTER, *Thesis* (University of London, 1953).
- [7] T. PEARCEY and B. MCHUGH, *Calculation of Viscous Flow around Spheres at Low Reynolds Numbers*, Phil. Mag. 46, 783-794 (1955).

- [8] V. G. JENSON, *Viscous Flow Round a Sphere at Low Reynolds Numbers* ( $< 40$ ), Proc. of the Royal Soc. of London, A, 249, 346–366 (1959).
- [9] F. H. GARNER, V. G. JENSON, R. B. KEEY, *Flow Pattern around Spheres and Reynolds Analogy*, Trans. of the Inst. of Chemical Engineers, 37, 191–197 (1959).

### Sommaire

On a obtenu une expression générale pour la fonction de courant de STOKES pour l'écoulement d'un liquide visqueux autour d'une sphère. Les lignes de courant ont été tracés pour les nombres de REYNOLDS = 1, 4 et 10. Le décollement du courant fluide n'a pas lieu pour les N. R. = 1 et 4, tandis que pour le N. R. = 10 les tourbillons attachés se forment dans le sillage.

(Received: December 27, 1960.)

---

### Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

---

## Shear Waves in a Semi-infinite Visco-Elastic Medium due to a Sudden Twist Applied at a Point on the Plane Boundary

By SUBHENDU K. DATTA, Calcutta, India<sup>1)</sup>

In this paper, the shear waves produced by a sudden twist applied at a point on the plane boundary of a semi-infinite visco-elastic medium at  $t = 0$  have been studied. The expressions for the displacement on the plane boundary for both small and large distances from the centre of disturbance have been obtained. The medium is supposed to be isotropic and of the Kelvin type.

### Introduction

Recently several authors have attempted to explain certain seismic observations on the supposition that the material constituting our earth is visco-elastic and of the Kelvin type (i.e. the mechanical model is a spring and dash-pot arranged in parallel). In a previous paper the present author has studied the shear waves due to a torque which is an exponential function of time and which is applied on the circumference of a circle on the plane boundary of a semi-infinite visco-elastic medium of the Kelvin type. Here the problem when the torque is suddenly applied at a point of the plane boundary at the time  $t = 0$  has been solved. Results have been obtained in parabolic cylinder functions and at large distances, in terms of Hermite Polynomials based on  $e^{-z^2/2}$ . In obtaining these results the method of COLLINS (1960)<sup>2)</sup> has been followed.

<sup>1)</sup> The Calcutta Technical School.

<sup>2)</sup> See the References, page 563.



### Equations and solution

We choose cylindrical polar coordinates  $(r, \theta, z)$  with the  $z$ -axis directed into the interior of the medium, the plane boundary being  $z = 0$ , with its origin at the centre of disturbance. Then the relevant nonvanishing stress components are

$$\tau_{\theta z} = \left( \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z}, \quad \tau_{r\theta} = \left( \mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r} \right),$$

where  $\mu, \mu'$  are constants and  $u_{\theta}$  is the circumferential component of the displacement vector. Thus  $u_{\theta}$  will satisfy the differential equation

$$\left. \begin{aligned} \left( 1 + \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r^2} + \frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial z^2} \right) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_{\theta}}{\partial t^2}, \\ \frac{\mu'}{\mu} &= \frac{1}{\omega_0}, \quad c^2 = \frac{\mu}{\rho}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

where  $\rho$  is the density of the medium.

Let us first suppose that the torque of moment  $N$  is applied on the circumference of the circle  $r = a$  and then making  $a$  tend to zero we shall obtain the solution when the torque is applied at the origin  $r = 0$ .

The boundary conditions are

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\theta z} &= -P \delta(r - a) \delta(t), \quad z = 0 \\ &= 0, \quad z = \infty, t \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

where

$$P = \frac{N}{2\pi a^2}.$$

Further,

$$u_{\theta} = \frac{\partial u_{\theta}}{\partial t} = 0, \quad t = 0.$$

Here  $\delta(z)$  is the Dirac  $\delta$ -function. Following COLLINS (1960) we define the two-sided Laplace transform

$$\bar{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

and henceforth shall use the notation

$$\bar{f}(s) \doteq f(t), \quad f(t) \doteq \bar{f}(s),$$

to denote the transform and its inverse. This modified Laplace transform of (1) and (2) gives

$$\left( 1 + \frac{s}{\omega_0} \right) \left( \frac{\partial^2 \bar{u}_{\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}_{\theta}}{\partial r} - \frac{\bar{u}_{\theta}}{r^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_{\theta}}{\partial z^2} \right) = \frac{s^2}{c^2} \bar{u}_{\theta}(r, z, s), \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}_{\theta z}(r, z, s) &= -P \delta(r - a), \quad z = 0 \\ &= 0, \quad z = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Using the Hankel transform defined by

$$u_{\theta}(\kappa, z, t) = \int_0^{\infty} r u_{\theta}(r, z, t) J_1(\kappa r) dr, \quad (5)$$

(3) and (4) give

$$\frac{d^2 \bar{u}_\theta(\kappa, z, s)}{dz^2} - \left\{ \kappa^2 + \frac{s^2}{c^2 (1 + s/\omega_0)} \right\} \bar{u}_\theta(\kappa, z, s) = 0, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}_{\theta z}(\kappa, z, s) &= -P a \int_0^\infty r J_1(\kappa r) J_1(\kappa a) dr, & z = 0 \\ &= 0, & z = \infty, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

where

$$- \bar{\tau}_{\theta z}(\kappa, z, s) = \mu \left( 1 + \frac{s}{\omega_0} \right) \frac{\partial}{\partial z} \dot{u}_\theta(\kappa, z, s). \quad (8)$$

Solving (6) and using (5), (7), (8) we get

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_\theta(\kappa, z, s) &= \frac{P a}{\mu} \frac{J_1(\kappa a)}{(1 + s/\omega_0) \{ \kappa^2 + s^2/c^2 (1 + s/\omega_0) \}^{1/2}} \\ &\quad \times \exp \left\{ - \left( \kappa^2 + \frac{s^2}{c^2 (1 + s/\omega_0)} \right)^{1/2} z \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

On inverting (9) we shall obtain at the limit

$$\left. \begin{aligned} \text{Lt}_{a \rightarrow 0} \bar{u}_\theta(r, 0, s) &= \frac{N s}{4 \pi \mu c (1 + s/\omega_0)^{3/2}} \left[ 1 + \frac{c (1 + s/\omega_0)^{1/2}}{s r} \right] \\ &\quad \times \frac{1}{r} \exp \left\{ - \frac{s r}{c (1 + s/\omega_0)^{1/2}} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Writing

$$\text{Lt}_{a \rightarrow 0} u_\theta(r, 0, t) = u(r, 0, t) \quad \text{and} \quad u(r, 0, t) \doteq u(r, 0, s)$$

we have

$$\left. \begin{aligned} u(r, 0, t) \doteq \frac{N s}{4 \pi \mu c r (1 + s/\omega_0)^{3/2}} \left[ 1 + \frac{c (1 + s/\omega_0)^{1/2}}{s r} \right] \\ \times \exp \left\{ - \frac{s r}{c (1 + s/\omega_0)^{1/2}} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Replacing  $r \omega_0/c$  by  $\xi$  and  $s$  by  $s \omega_0$ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\omega_0} u(r, 0, \frac{t}{\omega_0}) \doteq \frac{N s \omega_0^2}{4 \pi \mu c^2 \xi} \left[ (1 + s)^{-3/2} + \frac{1}{\xi} s^{-1} (1 + s)^{-1} \right] \\ \times \exp \left\{ - \frac{s \xi}{(1 + s)^{1/2}} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Again replacing  $s$  by  $s-1$ ,

$$u(r, 0, \frac{t}{\omega_0}) e^t \doteq \frac{N \omega_0^2}{4 \pi \mu c^2 \xi} \left[ s^{-1/2} + \frac{1}{\xi} s^{-1} - s^{-3/2} \right] \exp \{ - \xi s^{1/2} + \xi s^{-1/2} \}.$$

We now expand  $e^{\xi s^{-1/2}}$  in the form

$$e^{\xi s^{-1/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} s^{-n/2},$$

and obtain

$$u(r, 0, t/\omega_0) e^t \doteq \frac{N \omega_0^2}{4 \pi \mu c^2 \xi} e^{-\xi s^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( s^{-1/2} + \frac{1}{\xi} s^{-1} - s^{-3/2} \right) \xi^n \frac{s^{-n/2}}{n!}. \quad (13)$$

Inverting the right hand expression of (13) term by term (which is valid in the present case) (VAN DER PAL and BREMMER, 1950)

$$u(r, 0, \frac{t}{\omega_0}) e^t = \frac{N \omega_0^3}{4 \pi \mu c^2 \xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n (2t)^{n/2} e^{-\xi^2/8t}}{n! (\pi t)^{1/2}} \times \left[ D_{-n} \left( \frac{\xi}{\sqrt{2t}} \right) + \frac{\sqrt{2t}}{\xi} D_{-n-1} \left( \frac{\xi}{\sqrt{2t}} \right) - 2t D_{-n-2} \left( \frac{\xi}{\sqrt{2t}} \right) \right] H(t),$$

where  $H(t)$  is the step function defined by

$$H(t) = 1, \quad t > 0 \\ = 0, \quad t < 0$$

and  $D_{-n}(z)$  is the Weber parabolic cylinder function of negative integral order  $-n$ .

Replacing  $t$  by  $\omega_0 t$  and writing  $T = \omega_0 t$ , we get finally

$$u(r, 0, t) = \frac{N \omega_0^3}{4 \pi \mu c^2 \xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n (2T)^{n/2} e^{-T - \xi^2/8T}}{n! (\pi T)^{1/2}} \times \left[ D_{-n} \left( \frac{\xi}{\sqrt{2T}} \right) + \frac{\sqrt{2T}}{\xi} D_{-n-1} \left( \frac{\xi}{\sqrt{2T}} \right) - 2T D_{-n-2} \left( \frac{\xi}{\sqrt{2T}} \right) \right] H(T). \quad (14)$$

This expression (14) is rapidly convergent for small values of  $\xi$  and vanishes when  $T \rightarrow 0$ . Moreover it increases for some values of  $T > 0$  and then decreases to zero when  $T \rightarrow \infty$ .

We now attempt to obtain the asymptotic series for  $u(r, 0, t)$  when both  $t$  and  $r$  are large. To do this we use the fact that the inversion of the image when  $s \rightarrow 0$  gives the expression for  $u(r, 0, t)$  for  $t$  tending to infinity. Replacing  $s$  by  $s\alpha$  in (12), we obtain

$$\frac{1}{\omega_0 \alpha} u(r, 0, \frac{t}{\omega_0 \alpha}) = \frac{N \omega_0^2 s \alpha}{4 \pi \mu c^2 \xi} \left[ (1 + s\alpha)^{-3/2} + \frac{1}{\alpha \xi} s^{-1} (1 + \alpha s)^{-1} \right] e^{-s\alpha \xi / (1 + \alpha s)^{1/2}}, \quad (15)$$

where we shall take  $\alpha$  to be equal to  $\sqrt{2}/\xi$ . To get the asymptotic expansion we shall assume  $s$  to be small so that  $|\alpha s| \leq 1$ . Then,

$$(1 + \alpha s)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} s\alpha + \sum_{n=3}^{\infty} a_n (s\alpha)^{n-1}, \quad a_n = (-1)^{n+1} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2} \{(n-1)!\}^2}. \quad (16)$$

Therefore,

$$\frac{-\alpha \xi s}{(1 + \alpha s)^{1/2}} = -\alpha \xi s + s^2 - 2\alpha s^3 \sum_{n=3}^{\infty} a_n (\alpha s)^{n-3} = -\alpha \xi s + s^2 - 2\alpha s^3 S \quad (17)$$

writing  $S = \sum_{n=3}^{\infty} a_n (\alpha s)^{n-3}$ . Using (17) in (15)

$$u(r, 0, \frac{t}{\omega_0 \alpha}) = \frac{N \omega_0^3 \alpha}{4 \pi \mu c^2 \xi} \left[ \frac{\alpha s}{(1 + \alpha s)^{3/2}} + \frac{1}{\xi} \frac{1}{1 + \alpha s} \right] e^{-\alpha \xi s + s^2 - 2\alpha s^3 S}, \quad \left( \begin{matrix} s \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty \end{matrix} \right).$$

Again replacing  $t$  by  $t + \xi \alpha$ , we obtain

$$u(r, 0, \frac{t + \xi \alpha}{\omega_0 \alpha}) \sim \frac{N \omega_0^3 \alpha}{4 \pi \mu c^2 \xi} \left[ \alpha s p(s) + \frac{1}{\xi} q(s) \right] \left[ 1 + \sum_1^{\infty} \alpha^n r_n(s) \right] e^{s^2}, \quad \left( \begin{matrix} s \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty \end{matrix} \right)$$

where

$$p(s) = (1 + \alpha s)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2} \alpha s + \frac{3 \cdot 5}{2^2 \cdot 2!} \alpha^2 s^2 - \dots,$$

$$q(s) = (1 + \alpha s)^{-1} = 1 - \alpha s + \alpha^2 s^2 - \dots$$

and

$$e^{-2\alpha s^2} = 1 + \sum_1^{\infty} \alpha^n r_n(s) = 1 - 2 a_3 \alpha s^3 + 2 \alpha^2 (a_3^2 s^6 - a_4 s^4) - \dots$$

Using now the relations,

$$e^{s^2} \doteq \frac{1}{2 \sqrt{\pi}} e^{-t^2/4}, \quad s^n e^{s^2} \doteq \frac{(-1)^n}{2^{n/2+1} \sqrt{\pi}} H e_n \left( \frac{t}{\sqrt{2}} \right) e^{-t^2/4},$$

we obtain

$$u(r, 0, t) \sim \frac{N \omega_0^3 \alpha}{4 \pi \mu c^2 \xi} \left[ \sum_1^{\infty} \alpha^n P_n(u) + \frac{1}{\xi} \sum_0^{\infty} \alpha^n Q_n(u) \right] e^{-u^2/4}, \quad (18)$$

where  $u = (T - \xi)/\sqrt{\xi/2}$ ,  $He_n(z)$  is a Hermite polynomial of order  $n$  based on  $e^{-z^2/2}$  and

$$\sum_1^{\infty} \alpha^n P_n(t) e^{-t^2/4} = \alpha s p(s) \left( 1 + \sum_1^{\infty} \alpha^n r_n(s) \right) e^{s^2},$$

$$\sum_0^{\infty} \alpha^n Q_n(t) e^{-t^2/4} = q(s) \left( 1 + \sum_1^{\infty} \alpha^n r_n(s) \right) e^{s^2}.$$

It can be shown easily that

$$P_1(u) = - \frac{1}{2^{3/2} \sqrt{\pi}} He_1 \left( \frac{u}{\sqrt{2}} \right),$$

$$P_2(u) = - \frac{1}{4 \sqrt{\pi}} \left[ \frac{3}{2} He_2 \left( \frac{u}{\sqrt{2}} \right) + a_3 He_4 \left( \frac{u}{\sqrt{2}} \right) \right], \text{ etc. ,}$$

$$Q_0(u) = \frac{1}{2 \sqrt{\pi}},$$

$$Q_1(u) = \frac{1}{2^{3/2} \sqrt{\pi}} \left[ He_1 \left( \frac{u}{\sqrt{2}} \right) + a_3 He_3 \left( \frac{u}{\sqrt{2}} \right) \right], \text{ etc. .}$$

The right hand side of (18) is appreciable for small values of  $u$  i.e. for large values of  $\xi$  and  $T$  ( $T$  being very nearly equal to  $\xi$ ).

In conclusion, I express my thanks to Prof. B. SEN, D. Sc., F. N. I., for his kind help in the preparation of this paper.

## REFERENCES

- [1] A. ERDELYI, *Tables of Integral transforms*, Vol. 1, (McGraw-Hill 1954).  
 [2] A. ERDELYI, *Higher Transcendental functions*, Vol. 2, (McGraw-Hill 1953).  
 [3] A. ERDELYI, *Asymptotic expansions*, (New York, Dover 1956).  
 [4] B. VAN DER PAL and H. BREMMER, *Operational Calculus based on two-sided Laplace Transform*, (Cambridge Univ. Press 1950).  
 [5] F. COLLINS, *Geophysics*, Vol. 21, p. 16 (1960).  
 [6] S. DATTA, To be published in Proc. Nat. Inst. Sci. (India).

## Zusammenfassung

Es werden die Transversalwellen untersucht, welche in einem viskoelastischen Halbraum unter einem plötzlich an der Grenzebene angebrachten Moment entstehen. Insbesondere werden die Verschiebungen an der Grenzfläche für kleine und grosse Distanzen vom Störungszentrum angegeben. Das Medium wird als isotroper Kelvin-Stoff angenommen.

(Received: March 15, 1961.)

## Mechanical Dislocations and Steady State Processes

By ROSS M. EVAN-IWANOWSKI, Syracuse, N. Y., USA<sup>1)</sup>

N. I. MUSKHELISHVILI [1]<sup>2)</sup> and later H. PORITSKY [2] showed that if the temperature distribution  $T(x, y)$  in an elastic cylinder (plane strain problem) satisfies the Laplace's equation,  $\Delta T(x, y) = 0$ , then the stresses for the auxiliary problem ( $T \equiv 0$ ) are the same as for the original problem ( $T \neq 0$ ), (cf. [1], pp. 157–161). Thus, it was proved that the steady state of heat flow is a sufficient condition for this to be true.

Below it is demonstrated that the steady state condition is also a necessary condition for the auxiliary problem to have the same stresses as the original one.

The thermal effect (or an equivalent effect, such as Wigner growth effect caused by the fast neutron penetrating some materials) results in the following stresses (plane strain problem):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\nu T + \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}; & \sigma_y &= -\nu T + \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right); & \theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dividing this problem into two: auxiliary problem ( $T \equiv 0$ ) and thermal problem ( $T \neq 0$ ) we write

$$u = u' + u^*, \quad v = v' + v^* \quad (2)$$

where primed variables refer to the auxiliary problem, and the starred variables

<sup>1)</sup> Syracuse University, Department of Mechanical Engineering.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 564.



refer to the thermal problem. Substituting (2) into (1) results in the following:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \nu T = \lambda \theta' + 2\mu \frac{\partial u'}{\partial x} + \left( \lambda \theta^* + 2\mu \frac{\partial u^*}{\partial x} - \nu T \right), \\ \sigma_y &= \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \nu T = \lambda \theta' + 2\mu \frac{\partial v'}{\partial y} + \left( \lambda \theta^* + 2\mu \frac{\partial v^*}{\partial y} - \nu T \right), \\ \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\partial u^*}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

To obtain an auxiliary problem independent of the thermal problem, the following must be satisfied:

$$\lambda \theta^* + 2\mu \frac{\partial u^*}{\partial x} - \nu T = 0, \quad \lambda \theta^* + 2\mu \frac{\partial v^*}{\partial y} - \nu T = 0, \quad \frac{\partial v^*}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

which leads to

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} = \frac{\partial v^*}{\partial y}; \quad \frac{\partial u^*}{\partial y} = -\frac{\partial v^*}{\partial x}. \quad (5)$$

These are the Cauchy-Riemann conditions for the analyticity of the function

$$\phi(z) = u^* + i v^*.$$

From either (4) and (5) it also follows that

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} = \frac{\partial v^*}{\partial y} = \frac{\nu}{2(\lambda + \mu)} T(x, y). \quad (6)$$

Hence  $T(x, y)$  is the real part of an analytical function  $\Phi(z)$ , such that

$$\phi(z) = u^* + i v^* = \frac{\nu}{2(\lambda + \mu)} \int^z \Phi(z) dz, \quad (7)$$

$$\operatorname{Re}[\Phi(z)] = T(x, y). \quad (8)$$

Moreover

$$\Delta T(x, y) = 0. \quad (9)$$

This completes the proof.

Because of (7), the displacements of the auxiliary problem for the multiply connected regions can be multivalued functions (cf. [1], p. 164). This leads to the notion of (mechanical) dislocations [4]. To state it differently: introducing in a multiply connected body proper types of mechanical dislocations, one can simulate (mechanically) the effects of body forces satisfying (1) and (9). Moreover, the last proof indicates that only and only such effects are possible to simulate by (mechanical) dislocations. The significance of this fact, although a negative one, lies in the following. The simulation of the thermal (or similar) effects in the plane theory of elasticity by application of dislocations can be utilized for the photoelastic methods of stress determination [3]. The above theorem states that only steady state effects satisfying (1), can be simulated by the type of dislocations considered here, i. e., small rotations and small relative displacements.

## REFERENCES

- [1] N. I. MUSKHELISHVILI, *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, (P. Nordhoff, 1953).

- [2] H. PORITSKY, *Thermal stresses in cylindrical pipes*, Phil. Mag. [7], 24 (1937).  
 [3] E. G. COKER and L. N. G. FILON, *A treatise on photo-elasticity*, (Cambridge, University Press, 1957).  
 [4] V. VOLTERRA, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*, Paris, Ann. Éc. norm. [3], 24 (1907).

### Zusammenfassung

Es wird gezeigt, dass in einem elastischen, zylindrischen Körper der stationäre Wärme- (oder ein vergleichbarer physikalischer Prozess) eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür ist, dass sich die Spannungen aus einem Hilfsproblem mit fester Temperatur berechnen lassen. Es folgt daraus, dass sich in der Elastizität ebener Probleme nur stationäre Prozesse bei der Anwendung photoelastischer Methoden durch mechanische Dislokationen darstellen lassen.

(Received: April 25, 1961.)

## Remarks on the Differential Equation $\frac{dy}{dx} = \frac{y(y+x+2)}{x(2x-y)}$

By J. SIEKMANN, China Lake, California, USA<sup>1)</sup>

According to a remark by J. v. NEUMANN [1],<sup>2)</sup> the wellknown Blasius equation of order 3

$$f'''(\eta) + 2f(\eta)f''(\eta) = 0 \quad (1)$$

must be reducible to one of first order, because it permits the group of transformations

$$\eta \rightarrow \eta + \eta_0, \quad f(\eta) \rightarrow k f(k\eta). \quad (2)$$

Putting

$$f = e^{-t}, \quad \frac{df}{d\eta} = e^{-2t} x(t), \quad -\frac{dx}{dt} + 2x = y, \quad (3)$$

J. v. NEUMANN obtains the equation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x+y+2)}{x(2x-y)}, \quad (4)$$

with the initial condition

$$y \rightarrow \infty \quad \text{as} \quad x \rightarrow \infty. \quad (5)$$

This differential equation may be classified as an Abelian differential equation of the second kind. By suitable substitution it may be subsumed also in the category of the Abel differential equations of the first kind. A formal treatment as an exact or total differential equation is possible by means of an Eulerian multiplier.

In order to study the behavior of the integral curves of the differential equation (4), an analog investigation was made by the REAC computer of the U.S. Naval Ordnance Test Station, China Lake, California. We note first of all that this first-

<sup>1)</sup> U. S. Naval Ordnance Test Station, Research Dpt.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 567.

order differential equation has singularities at the origin, i.e.,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ; at infinity, i.e.,  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow \infty$ ; and at the intersections of the straight line  $y + x + 2 = 0$  with the straight line  $2x - y = 0$  and the  $y$ -axis  $x = 0$ , i.e., the points  $x = -2/3$ ,  $y = -4/3$  and  $x = 0$ ,  $y = -2$ . As these points are approached both numerator and denominator tend towards zero and when the magnitude of the output voltage of the amplifiers representing these functions approaches the noise level of the amplifiers, the solution becomes meaningless.

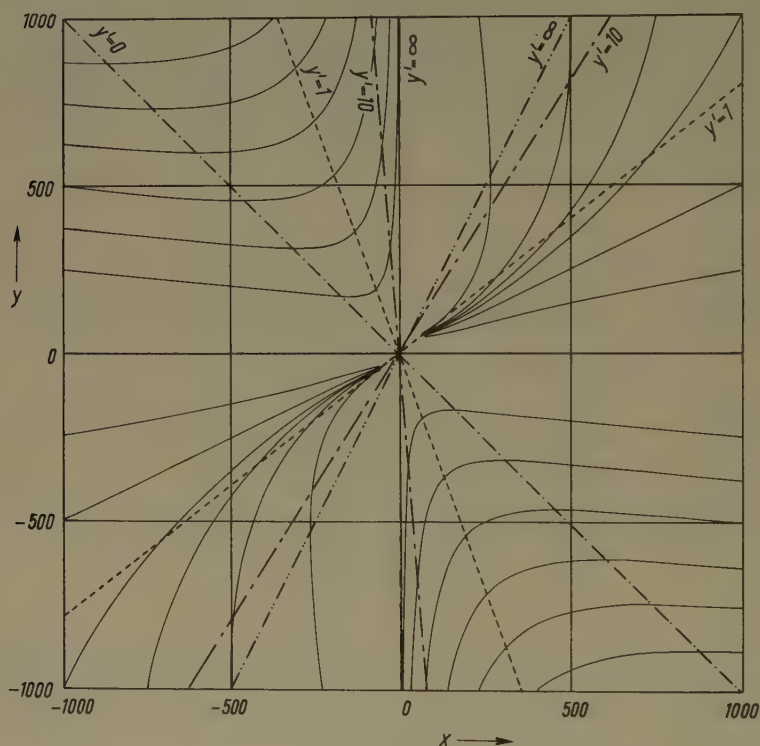


Figure 1

$$\text{Direction field } \frac{dy}{dx} = \frac{y(x+y+2)}{x(2x-y)}.$$

The equation was first coded and scaled to yield a solution within the limits  $-1000 < x < 1000$  and  $-1000 < y < 1000$ . Then the program was rescaled to investigate a very small region near the origin:  $-2 < x < 2$ ,  $-3 < y < 1$ . In order to check the accuracy of the solutions, the equation for the isoclines  $y' = \text{const.}$  was also programmed. The results are given in Figs. 1 and 2. They represent the direction field described by the differential equation (4). The isoclines appear as dotted and dot-dashed lines.

I would like to thank very much Mr. A. Moline of the NOTS Analog Computing Group for providing the programs.

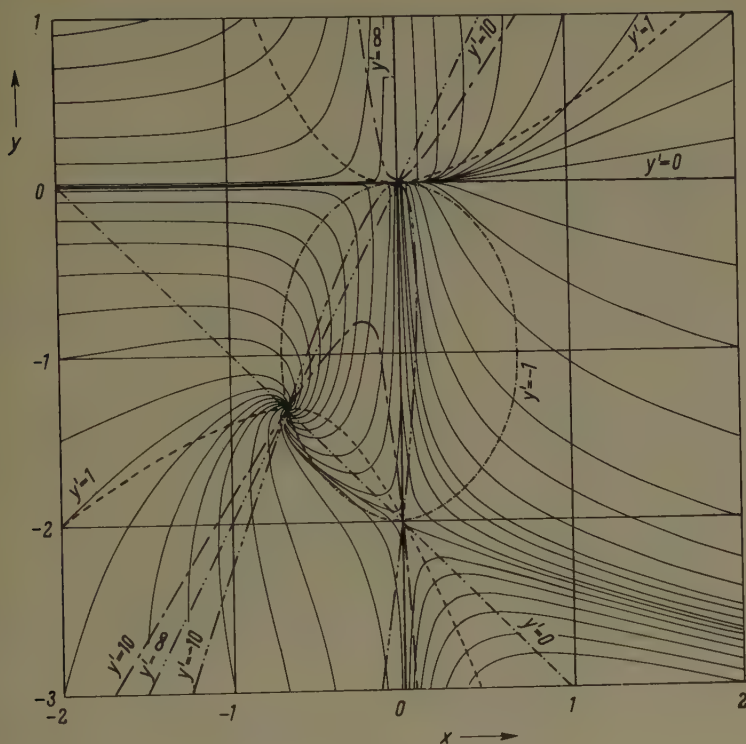


Figure 2

$$\text{Direction field } \frac{dy}{dx} = \frac{y(x+y+2)}{x(2x-y)}.$$

## REFERENCES

- [1] H. WEYL, *On the Differential Equations of the Simplest Boundary-Layer Problems*. Ann. Math. 43, 2, 381–407 (1942), p. 389.
- [2] A. MOLINE: NOTS Technical Note 5075–14.
- [3] J. SIEKMANN: NOTS Technical Note 4061–35.

## Zusammenfassung

Es wird eine Übersicht über den Verlauf der Integralkurven einer in der Grenzschichttheorie auftretenden Differentialgleichung gegeben. Die Lösungen wurden mittels eines Analogrechners berechnet.

(Received: June 9, 1961.)

## Ein quadratisch konvergentes Verfahren zur Eigenwertbestimmung bei unsymmetrischen Matrizen I

VON HEINZ RUTISHAUSER, ETH, Zürich<sup>1)</sup>

Von J. C. F. FRANCIS<sup>2)</sup> ist kürzlich ein aus der  $LR$ -Transformation [1, 2, 3] abgeleitetes Verfahren zur Eigenwertbestimmung angekündigt worden, das ebenfalls auf der Zerlegung der Matrix in 2 Faktoren beruht, die nachher in umgekehrter Reihenfolge wieder zusammenmultipliziert werden. Dieses Verfahren hat den Vorteil, dass die genannte Faktorenerlegung – im Gegensatz zur  $LR$ -Transformation – auch bei unsymmetrischen Matrizen nicht infolge Division durch Null scheitern kann.

1. Allerdings ist das genannte Verfahren von FRANCIS (im folgenden sei es als  $QR$ -Transformation bezeichnet) nur linear konvergent; man kann aber die Konvergenz durch geeignete Koordinatenverschiebungen erheblich beschleunigen, wie in der Originalarbeit von FRANCIS gezeigt wurde. Indessen stellt die Bestimmung der Koordinatenverschiebungen eine gewisse Willkür dar und ist in einem vollautomatisch ablaufenden Rechenprozess etwas problematisch.

Man kann aber – und dies ist der Gegenstand der vorliegenden Mitteilung – die  $QR$ -Transformation so modifizieren, dass ein im Sinne von GRAEFFE<sup>3)</sup> quadratisch konvergenter Rechenprozess resultiert, der in einem Rechenautomaten völlig zwangsläufig und störungsfrei abläuft und damit die «narrensichere» Bestimmung der Eigenwerte einer beliebigen quadratischen Matrix gestattet. Dies stellt insofern einen wesentlichen Fortschritt dar, als man dies von kaum einem der bisher bekannten Verfahren behaupten kann.

2. Wenn die gegebene Matrix mit  $A_1$  bezeichnet wird, so kann die  $QR$ -Transformation im Prinzip durch folgende ALGOL-ähnliche<sup>4)</sup> *Rechenvorschrift* A definiert werden:

```

for   k: = 1 step 1 until inf do
begin
1:   Zerlege  $A_k$  in 2 Faktoren  $Q_k \times R_k$ , von denen  $Q_k$  eine orthogonale5),  $R_k$ 
      dagegen eine obere Dreiecksmatrix mit positiv reellen Diagonalelementen6)
      sein soll;
2:   Multipliziere  $R_k$  und  $Q_k$  zusammen zu  $A_{k+1} = R_k \times Q_k$ 
end

```

<sup>1)</sup> Institut für angewandte Mathematik.

<sup>2)</sup> *Invitational Symposium on Matrix Computations*, Gatlinburg, Tennessee, April 1961; erscheint im «Computer Journal».

<sup>3)</sup> Der Zusatz «im Sinne von GRAEFFE» deutet an, dass das behauptete Konvergenzverhalten für alle Eigenwerte gleichzeitig gilt. Im Gegensatz dazu ist ein Konvergenzverhalten «im Sinne von NEWTON», das nur für einen einzelnen Eigenwert zutrifft.

<sup>4)</sup> Es handelt sich um ein ALGOL-Programm, in dem gewisse zusammengesetzte Anweisungen zu Pseudoanweisungen zusammengefasst sind, die die auszuführenden Operationen in Worten beschrieben. Ausserdem sind die Deklarationen weggelassen.

<sup>5)</sup> Wir betrachten hier nur reelle Matrizen. Diese können durch orthogonale Transformationen zwar nicht allgemein auf Dreiecksform [4], aber immer auf Wintner-Murnaghansche Normalform transformiert werden [5].

<sup>6)</sup> Ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass die gegebene Matrix nichtsingulär sei. Andernfalls kann man diesen Zustand durch kleine Störungen herstellen.



Wie FRANCIS beweist, konvergiert<sup>7)</sup> die so erzeugte unendliche Folge ähnlicher Matrizen unter gewissen Bedingungen gegen eine Wintner-Murnaghansche Normalform, das heisst gegen eine Matrix mit den Eigenschaften

- a)  $a_{ij} = 0$  für  $i > j + 1$ ,  
 b)  $a_{i, i-1} a_{i+1, i} = 0$  für alle  $i = 2, 3, \dots, n - 1$ . (1)

In beiden Fällen kann man für hinreichend grosses  $k$  die Eigenwerte der Matrix  $A_1$  aus  $A_k$  angenähert ablesen: Reelle Eigenwerte erscheinen als Diagonalelemente von  $A_k$ ; die komplexen Eigenwertpaare erhält man leicht als Eigenwerte gewisser zweireihiger Untermatrizen, die längs der Diagonalen von  $A_k$  auftreten.

3. Man kann nun in Analogie zu [1], § 12, die QR-Transformation so modifizieren, dass nur die Matrizen  $A_2, A_3, A_5, A_9, A_{17} \dots$  der in Abschnitt 2 genannten Matrizenfolge  $A_k$  in der Rechnung mitgeführt werden müssen. Man erhält dann die folgende *Rechenvorschrift B*:

*begin*  
 1: Zerlege  $A_1$  in 2 Faktoren  $P_1 \times S_1$ , wobei  $P_1$  eine orthogonale,  $S_1$  eine obere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonalelementen sei;  
 2: *for*  $k := 1, 2 \times k$  *while true do*  
   *begin*  
 3: Bilde das Produkt  $S_k \times P_k$  und zerlege dasselbe wieder in 2 Faktoren  $\hat{P}_k \times \hat{S}_k$ , wobei  $\hat{P}_k$  eine orthogonale,  $\hat{S}_k$  eine obere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonalelementen sei;  
 4: Bilde das Produkt  $P_{2k} := P_k \times \hat{P}_k$ ;  
 5: Bilde das Produkt  $S_{2k} := \hat{S}_k \times S_k$ ;  
   *end*  
*end*

Für die so erzeugten Matrizen  $P_1, P_2, P_4, P_8, \dots$  und  $S_1, S_2, S_4, S_8, \dots$  gilt alsdann:  $P_k = Q_1 Q_2 Q_3 \dots Q_k$ ,  $S_k = R_k R_{k-1} R_{k-2} \dots R_2 R_1$ , sowie  $A_{k+1} = P_k^{-1} A_1 P_k$ , wobei die Matrizen  $A_{k+1}, Q_k, R_k$  ( $k = 1, 2, 4, 8, 16, \dots$ ) dieselben sind, wie sie durch die Rechenvorschrift A erzeugt werden.

Daher lassen sich die Konvergenzeigenschaften der Rechenvorschrift B sofort aus den Ausführungen von FRANCIS ablesen, wobei man aber zu berücksichtigen hat, dass für die Rechenvorschrift B nur die Grössen zu den Indexwerten  $k = 2^s$  berechnet werden müssen. Dies ist insbesondere im Hinblick auf die Formel

$$A_{k+1} = P_k^{-1} A_1 P_k \quad (2)$$

interessant, welche somit aussagt, dass die Rechenvorschrift B schon nach verhältnismässig kurzer Zeit eine orthogonale Matrix  $P_k$  liefert, die die gegebene Matrix  $A_1$  mit genügender Genauigkeit auf Wintner-Murnaghansche Normalform transformiert und somit die im Titel genannte Aufgabe im Sinne der numerischen Mathematik löst (siehe jedoch Abschnitt 5).

4. Besondere Aufmerksamkeit muss der Wiederzerlegung des Produkts  $S_k P_k$  in 2 Faktoren  $\hat{P}_k \hat{S}_k$  geschenkt werden. Wenn wir nun  $P_k$  in ein Produkt von  $m = n(n-1)/2$  Jacobische Elementardrehungen zerlegt denken:

$$P_k = U_1 U_2 \dots U_m, \quad (3)$$

<sup>7)</sup> Es handelt sich hier nicht um eigentliche Konvergenz, sondern nur um Konvergenz der Form nach, das heisst, die auch im  $\lim k \rightarrow \infty$  nicht verschwindenden Elemente der Matrizen  $A_k$  entsprechen den nichtverschwindenden Elementen einer Wintner-Murnaghanschen Normalform.

wobei (mit einem gewissen, von  $j$  abhängigen  $i$ ):

$$U_j = \left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \cos \varphi_j & \sin \varphi_j & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & -\sin \varphi_j & \cos \varphi_j & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \text{Zeile } i \\ \text{Zeile } i + 1 \end{array} \quad (4)$$

ist, so kann auch die Operation  $S_k P_k = \hat{P}_k \hat{S}_k$  in Einzelschritte aufgelöst werden:

$$\left. \begin{aligned} S_k U_1 &= \hat{U}_1 S_k^{(1)}, \\ S_k^{(1)} U_2 &= \hat{U}_2 S_k^{(2)}, \\ &\vdots \\ S_k^{(m-1)} U_m &= \hat{U}_m S_k^{(m)}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Die  $\hat{U}_j$  sind ebenfalls Jacobische Elementardrehungen, die sich von den entsprechenden  $U_j$  nur durch den Drehwinkel  $\hat{\varphi}_j$  unterscheiden, welche durch die Forderung, dass alle  $S_k^{(j)}$  obere Dreiecksmatrizen mit positiven Diagonalelementen sein sollen, im wesentlichen eindeutig bestimmt sind. Man findet

$$\operatorname{ctg} \hat{\varphi}_j = \frac{x \operatorname{ctg} \varphi_j - y}{z}, \quad (6)$$

wenn  $x, y, z$ , beziehungsweise das  $(i, i)$ -,  $(i, i + 1)$ - und  $(i + 1, i + 1)$ -Element der Matrix  $S_k^{(j-1)}$  bezeichnen.

Schliesslich wird

$$\hat{S}_k = S_k^{(m)}, \quad P_k = \hat{U}_1 \hat{U}_2 \dots \hat{U}_m, \quad (7)$$

und damit

$$P_{2k} = P_k \hat{P}_k = P_k \hat{U}_1 \dots \hat{U}_m \quad (8)$$

sowie wegen (2) und (8):

$$A_{2k+1} = \hat{U}_m^{-1} \hat{U}_{m-1}^{-1} \dots \hat{U}_1^{-1} A_{k+1} \hat{U}_1 \hat{U}_2 \dots \hat{U}_m. \quad (9)$$

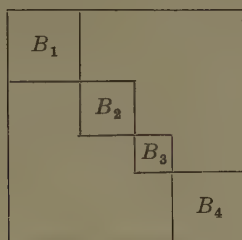
Die Gleichungen (8) und (9) besagen aber, dass man die Matrix  $A_1$  durch eine Folge von Jacobischen Elementardrehungen auf Wintner-Murnaghansche Normalform transformieren kann, die Drehwinkel  $\hat{\varphi}_j$  werden durch die Formel (6) bestimmt.

5. Leider kann die Konvergenz des genannten Verfahrens durch 2 Umstände erheblich gestört werden:

a) Es kann ein zu «disorder of latent roots» (siehe [1], § 4.3) analoger Fall eintreten, der sich darin äussert, dass die Diagonalelemente von  $S_k$  sich auch im lim  $k \rightarrow \infty$  nicht der Grösse nach ordnen. Diese Erscheinung kann man leicht ver-

hindern, indem man in der Formel (6) einen Maximalwert für  $\text{ctg } \varphi_j$  festlegt, derart, dass man bei Überschreiten dieses Maximalwertes mit  $M$  anstelle des wahren Werts von  $\text{ctg } \varphi_j$  in diese Formel eingeht. Ein zweckmässiger Wert für  $M$  dürfte etwa  $10^{12}$  sein.

b) Falls mehr als 2 Eigenwerte der Matrix  $A_1$  denselben Absolutbetrag besitzen (beispielsweise wenn  $A_1$  orthogonal ist!), so wird  $A_1$  für  $k \rightarrow \infty$  nicht auf die Wintner-Murnaghansche Normalform, sondern lediglich auf die allgemeinere Form



transformiert, wobei jede der Matrizen  $B$  Eigenwerte gleichen Absolutbetrages hat, welche auch Eigenwerte von  $A_1$  sind.

Bevor wir für diesen Fall eine Nachbildung des Verfahrens von BRODETZKI-SMEAL vorschlagen (das mit einem erhöhten Rechenaufwand verbunden ist), sollen erst numerische Experimente abgewartet werden, die zeigen sollen, ob nicht schon die durch die Rundungsfehler verursachten Störungen der Eigenwerte ausreichen, um das Eintreten dieses Falles zu verhindern.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. RUTISHAUSER, *Solution of Eigenvalue Problems with the LR-Transformation*, Nat. Bur. Standards, AMS 49, 47–81 (1958).
- [2] E. HEILBRONNER, H. RUTISHAUSER, F. GERSON, *Verfahren zur programm-gesteuerten Berechnung der Eigenwerte eindimensionaler Molekelmodelle*, Helv. Chim. Acta 42, 2285–2303 (1959).
- [3] H. RUTISHAUSER, *Über eine kubisch konvergente Variante der LR-Transformation*, Z. angew. Math. Mech. 40, 49–54 (1960).
- [4] I. SCHUR, *Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen*, Math. Ann. 66, 488–510 (1908).
- [5] A. WINTNER und F. D. MURNAGHAN, *A Canonical Form for Real Matrices under Orthogonal Transformations*, Proc. USA Nat. Academy, Vol. 17, 417–420 (1931).

#### Summary

J. C. F. FRANCIS proposes for the determination of eigenvalues of an arbitrary matrix the  $QR$ -transformation which is a unitary analogue of the  $LR$ -transformation. In this process the current approximation matrix is always factorized into a unitary and a triangular matrix and the 2 factors are multiplied together in reverse order; this yields the next approximant. The present paper shows how this process may be extended to a process which transforms a given matrix with quadratic convergence orthogonally to WINTNER-MURNAGHAN's normal form. The process is formulated in the real domain.

(Eingegangen: 4. Juli 1961.)

## Potenzieren von verallgemeinerten Potenzreihen mit beliebigem Exponent

VON MICHAŁ ŻYCZKOWSKI, Kraków, Polen<sup>1)</sup>

Bei praktischen Anwendungen von Potenzreihen, zum Beispiel beim Lösen von Differentialgleichungen, ist es oft nötig, die Potenzreihen zu potenzieren. Die zweite oder die dritte Potenz lässt sich ziemlich leicht finden mit dem Verfahren der unbestimmten Vorzahlen, welches die Koeffizienten der Anfangsglieder der Reihe nacheinander zu berechnen erlaubt. Einige Anfangsglieder der vierten und fünften Potenz kann man in der Arbeit [7]<sup>2)</sup> finden. Im Fall von anderen Werten des Potenzexponenten werden die Rechnungen oft kompliziert.

Manche Verfasser (LASKA [4], ADAMS [1], RYSHIK und GRADSTEIN [5]) geben die Rekursionsformel an, welche den Koeffizient  $A_j$  in Entwicklung

$$\left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \right)^n = \sum_{j=0}^{\infty} A_j x^j \quad (1)$$

bezeichnet. Angenommen,  $n$  sei ganzzahlig positiv und  $a_0 \neq 0$ , haben wir

$$A_0 = a_0^n, \quad A_j = \frac{1}{j a_0} \sum_{i=1}^j (n i + i - j) a_i A_{j-i}. \quad (2)$$

Es lässt sich leicht nachprüfen, dass diese Formeln bei beliebigem reellem Wert  $n$  gültig bleiben, was auch das Radizieren von Potenzreihen ermöglicht.

In vorliegender Mitteilung gehen wir weiter und geben unmittelbare Formeln für die Koeffizienten  $A_j$  des Resultates von Potenzieren der Potenzreihen von allgemeinerem Typus. Wir befassen uns nämlich mit Potenzreihen, deren Exponenten auch Bruchwerte annehmen können; solche Reihen (die zum Beispiel die Besselschen Funktionen von Bruchordnung bestimmen) werden auch manchmal «verallgemeinerte Potenzreihen» genannt (SMIRNOW [6]). Um von der unbequemen Voraussetzung  $a_0 \neq 0$  loszukommen, schreiben wir unsere Reihe in der Gestalt

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{\mu+\nu j}. \quad (3)$$

Diesmal beschränkt die Voraussetzung  $a_0 \neq 0$  die Allgemeinheit nicht, da man immer  $\mu$  (Zeiger des ersten nicht Null gleichen Gliedes) entsprechend wählen kann. Die Zahl  $\nu$  kann einen beliebigen reellen Wert annehmen; setzen wir  $\nu = 2$ , so fassen wir möglichst kompakt die Reihen für gerade ( $\mu$  gerade) und ungerade ( $\mu$  ungerade) Funktionen, und zwar fallen die Glieder mit nullgleichen Koeffizienten aus. Im Falle, wo  $\mu$  oder  $\nu$  Bruchwerte sind, setzen wir grundsätzlich  $x \geq 0$ , obwohl diese Voraussetzung nicht immer nötig ist.

Befassen wir uns mit der Funktion

$$F(x) = \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{\mu+\nu j} \right)^{\xi}, \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Politechnika Krakowska, Lehrstuhl für technische Mechanik.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 576.

wo  $\xi$  eine beliebige reelle Zahl ist. Zuerst die Umformung

$$\left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{\mu+\nu j} \right)^{\xi} = x^{\mu \xi} \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{\nu j} \right)^{\xi} = x^{\mu \xi} \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j \right)^{\xi}, \quad (5)$$

wo

$$x^{\nu} = t \quad (6)$$

bezeichnet wird. So wird also das Potenzieren der verallgemeinerten Potenzreihe zum Potenzieren einer gewöhnlichen Potenzreihe reduziert.

Bezeichnen wir

$$g(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j, \quad G(t) = \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j \right)^{\xi} = [g(t)]^{\xi} \quad (7)$$

und suchen die Entwicklung dieser letzten Funktion in der Gestalt

$$G(t) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j t^j. \quad (8)$$

Setzen wir  $t = 0$  in (7) und (8), so bekommen wir direkt

$$A_0 = a_0^{\xi}, \quad (9)$$

differentiiert man die Funktion (8)  $n$ -mal nach  $t$  und setzt  $t = 0$ , erhält man

$$A_n = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}. \quad (10)$$

Weil  $G(t)$  eine zusammengesetzte Funktion (7) ist, reduziert sich das Problem auf die Berechnung der  $n$ -ten Ableitung der zusammengesetzten Funktion. Die entsprechende allgemeine Formel wurde von DE BRUNO [2] gegeben und zum Beispiel von GOURSAT [3] und RYSHIK und GRADSTEIN [5] zitiert. Diese Formel hat die Gestalt

$$G^{(n)}(t) = \sum_{s=1}^S \frac{n!}{k_{1s}! k_{2s}! \dots k_{ns}!} \frac{d^m G}{d g^m} \left( \frac{g'}{1!} \right)^{k_{1s}} \left( \frac{g''}{2!} \right)^{k_{2s}} \dots \left( \frac{g^{(n)}}{n!} \right)^{k_{ns}}, \quad (11)$$

wo die Summierung alle ganzzahligen nichtnegativen Wurzeln  $k_{is}$  der Gleichung

$$k_1 + 2 k_2 + 3 k_3 + \dots + n k_n = n \quad (12)$$

betrifft und  $S$  die Zahl der Lösungen dieser Gleichung bezeichnet, dagegen

$$m = k_{1s} + k_{2s} + k_{3s} + \dots + k_{ns} = m(s). \quad (13)$$

In unserem Fall  $G(t) = [g(t)]^{\xi}$ , also

$$\frac{d^m G}{d g^m} = \xi (\xi - 1) \dots (\xi - m + 1) g^{\xi - m}, \quad (14)$$

und nach (7) haben wir

$$g^{(i)}(0) = i! a_i. \quad (15)$$

Daher

$$G^{(n)}(0) = \sum_{s=1}^S \frac{n!}{k_{1s}! k_{2s}! \dots k_{ns}!} \xi (\xi - 1) \dots (\xi - m + 1) a_0^{\xi - m} a_1^{k_{1s}} a_2^{k_{2s}} \dots a_n^{k_{ns}}, \quad (16)$$



und endlich

$$A_n = \sum_{s=1}^S \frac{\xi(\xi-1)\dots(\xi-m+1)}{k_{1s}! k_{2s}! \dots k_{ns}!} a_0^{\xi-m} a_1^{k_{1s}} a_2^{k_{2s}} \dots a_n^{k_{ns}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

Diese Formel mit der Formel (9) zusammen bilden die gesuchten allgemeinen Formeln für die Koeffizienten der mit beliebigem Exponent potenzierten Potenzreihe, denn nach (4), (5), (6), (7) und (8) erhalten wir

$$F(x) = \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{\mu+\nu j} \right)^{\xi} = \sum_{j=0}^{\infty} A_j x^{\mu\xi+\nu j}. \quad (18)$$

Weil  $\xi$  eine beliebige reelle Zahl ist, umfasst diese Formel auch das Radizieren einer Potenzreihe und das Dividieren einer Zahl durch eine Potenzreihe.

Das Suchen der ganzzahligen nichtnegativen Wurzeln der Gleichung (12), welches zur Anwendung der Formel (17) nötig ist, ist für kleine  $n$  sehr einfach. Für  $n = 1$  hat man nur  $k_1 = 1$ , also  $S = 1$ ; für  $n = 2$  hat man  $k_1 = k_{11} = 2$ ,  $k_2 = k_{21} = 0$ , oder  $k_1 = k_{12} = 0$ ,  $k_2 = k_{22} = 1$ , also  $S = 2$ , usw. Die vier ersten Glieder  $A_n$  haben also die Gestalt

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= a_0^{\xi}, \\ A_1 &= \xi a_0^{\xi-1} a_1, \\ A_2 &= \frac{\xi(\xi-1)}{2!} a_0^{\xi-2} a_1^2 + \frac{\xi}{1!} a_0^{\xi-1} a_2, \\ A_3 &= \frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)}{3!} a_0^{\xi-3} a_1^3 + \frac{\xi(\xi-1)}{1!1!} a_0^{\xi-2} a_1 a_2 + \frac{\xi}{1!} a_0^{\xi-1} a_3, \\ A_4 &= \frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)(\xi-3)}{4!} a_0^{\xi-4} a_1^4 + \frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)}{2!1!} a_0^{\xi-3} a_1^2 a_2 \\ &\quad + \frac{\xi(\xi-1)}{2!} a_0^{\xi-2} a_2^2 + \frac{\xi(\xi-1)}{1!1!} a_0^{\xi-2} a_1 a_3 + \frac{\xi}{1!} a_0^{\xi-1} a_4. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Bei höheren Werten für  $n$ , die übrigens in Anwendungen seltener auftreten, wächst schnell die Zahl der Summanden  $S$  in Ausdrücken für  $A_n$ : bei  $n = 5$  hat man  $S = 7$ ; bei  $n = 6$ ,  $S = 11$ ; bei  $n = 7$ ,  $S = 15$ . Für diese Werte  $n$  sind alle Lösungen der Gleichung (12), mit entsprechenden Werten  $m$  zusammen, in den Tafeln 1, 2 und 3 zusammengestellt.

Tafel 1

Die Wurzeln der Gleichung (12) für  $n = 5$

$s$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$m$
1	0	0	0	0	1	1
2	1	0	0	1	0	2
3	0	1	1	0	0	2
4	2	0	1	0	0	3
5	1	2	0	0	0	3
6	3	1	0	0	0	4
7 = S	5	0	0	0	0	5

Tafel 2

Die Wurzeln der Gleichung (12) für  $n = 6$

$s$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$m$
1	0	0	0	0	0	1	1
2	1	0	0	0	1	0	2
3	0	1	0	1	0	0	2
4	0	0	2	0	0	0	2
5	2	0	0	1	0	0	3
6	1	1	1	0	0	0	3
7	0	3	0	0	0	0	3
8	3	0	1	0	0	0	4
9	2	2	0	0	0	0	4
10	4	1	0	0	0	0	5
11 = S	6	0	0	0	0	0	6

Tafel 3

Die Wurzeln der Gleichung (12) für  $n = 7$

$s$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$m$
1	0	0	0	0	0	0	1	1
2	1	0	0	0	0	1	0	2
3	0	1	0	0	1	0	0	2
4	0	0	1	1	0	0	0	2
5	2	0	0	0	1	0	0	3
6	1	1	0	1	0	0	0	3
7	1	0	2	0	0	0	0	3
8	0	2	1	0	0	0	0	3
9	3	0	0	1	0	0	0	4
10	2	1	1	0	0	0	0	4
11	1	3	0	0	0	0	0	4
12	4	0	1	0	0	0	0	5
13	3	2	0	0	0	0	0	5
14	5	1	0	0	0	0	0	6
15 = S	7	0	0	0	0	0	0	7

Als Beispiel berechnen wir einige ersten Glieder der Entwicklung der Funktion

$$F(x) = [J_{1/3}(x)]^{3/2}$$

in die verallgemeinerte Potenzreihe. Die Besselsche Funktion  $J_{1/3}(x)$  besitzt die Entwicklung

$$J_{1/3}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (x/2)^{1/3+2j}}{\Gamma(j+1) \Gamma(j+4/3)} = \frac{x^{1/3}}{\sqrt{2} \Gamma(4/3)} \left( 1 - \frac{3}{16} x^2 + \frac{9}{896} x^4 - \frac{9}{35840} x^6 + \dots \right),$$

daher  $\mu = 1/3$ ,  $\nu = 2$ , und da wir  $\xi = 3/2$  angenommen haben, erhält also die gesuchte Reihe die Gestalt

$$[J_{1/3}(x)]^{3/2} = \sum_{j=0}^{\infty} A_j x^{1/2+2j}.$$

Die Formeln (9) und (19) benutzend berechnen wir  $A_j$  und endlich

$$[J_{1/3}(x)]^{3/2} = \frac{1}{\sqrt{2} [\Gamma(4/3)]^{3/2}} \left( x^{1/2} - \frac{9}{32} x^{5/2} + \frac{405}{14\,336} x^{9/2} - \frac{3159}{2\,293\,760} x^{13/2} + \dots \right).$$

Die Konvergenz dieser Reihe ist gut; zum Beispiel für  $x = 1$  nach Behalten der vier Glieder der Reihe, weil  $I'(4/3) = 0,8929795$  [9], bekommen wir  $[J_{1/3}(1)]^{3/2} \sim 0,624818$ , anstatt des exakten Wertes (WATSON [8])  $[J_{1/3}(1)]^{3/2} = 0,624836$ .

### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] E. ADAMS, *Smithsonian Mathematical Formulae* (Washington, 1922).
- [2] FAA DE BRUNO, *Quart. J. Math.*, Vol. 1, 359 (zitiert nach [3]).
- [3] E. GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique* (Paris 1927).
- [4] W. LASKA, *Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik* (F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1888).
- [5] I. M. RYSHIK, I. S. GRADSTEIN, *Tablitsy integralow, summ, rjadow i proiswedenij*, Gos. Isdat. Techn.-Teoret. Lit. (Moskau-Leningrad 1951).
- [6] W. I. SMIRNOW, *Kurs wyssšej matematiki*, Bd. 2, 11. Aufl., Gos. Isdat Techn.-Teoret. Lit. (Moskau-Leningrad 1952).
- [7] J. WALCZAK, M. ŻYCZKOWSKI, *Nowy sposób wymiarowania prętów o dużej krzywiźnie*, Archiwum Budowy Maszyn 4 (1957), 33–62.
- [8] G. N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2. Aufl. (Cambridge 1945).
- [9] M. ŻYCZKOWSKI, *Tablice funkcij Eulera i pokrewnych*, Państw. Wydawn. Naukowe (Warszawa 1954).

### Summary

The paper gives general formula (17) for coefficients of any real power  $\xi$  of a generalized power series (4). Four first coefficients are given by (19). An example of application to Bessel functions is described.

(Eingegangen: 10. Mai 1961.)

## Eighth National Symposium on Reliability and Quality Control in Washington, D. C., USA

In Washington, D.C. (USA) findet vom 9. bis 11. Januar 1962 das *8th National Symposium on Reliability and Quality Control* statt. Betriebssicherheit und Qualitätsüberwachung sind Gesichtspunkte, die in heutigen elektronischen Geräten, welche Tausende und oft Zehntausende von Schaltelementen enthalten, grösste Bedeutung erlangt haben. Vom einwandfreien Funktionieren einer elektronischen Anlage kann die Produktion eines ganzen Betriebes, ja im Kriegsfall ganzer Landesteile abhängen. Der Zweck dieser Tagung, welche vom Institute of Radio Engineers (IRE) und anderen wissenschaftlichen Vereinigungen durchgeführt wird, ist, Spezialisten, welche auf dem Gebiet der Betriebssicherheit und Qualitätsüberwachung über Erfahrung verfügen, zusammenzuführen. In Vorträgen und Diskussionen wird ein ausgiebiger Gedankenaustausch gepflegt. Programme und Anmeldeformulare sind zu beziehen bei A. H. DRAYNER, Publicity Chairman, The Martin Co., Baltimore, Md., USA.

A. P. SPEISER

## IUTAM-Symposium über Kreiselprobleme

Die Internationale Union für Theoretische und Angewandte Mechanik wird vom 20. bis zum 23. August 1962 in Celerina (Oberengadin) ein *Internationales Symposium über Kreiselprobleme* (Theoretische Grundlagen, Anwendungen, Kreiselgerätetechnik) abhalten.

Interessenten wollen sich an Prof. Dr. H. ZIEGLER, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich, wenden.

## Die Erstellung eines internationalen mehrsprachigen Verzeichnisses von Begriffen und Fachwörtern über Rechenanlagen

Durch die Zusammenarbeit von zwei internationalen Organisationen wird zur Zeit ein mehrsprachiges Verzeichnis von Begriffen und Fachwörtern über die Terminologie der automatischen Datenverarbeitung erstellt, welchem internationale Bedeutung zukommen wird. Die zwei Organisationen, nämlich die Internationale Föderation für Datenverarbeitung (IFIPS) und das Provisorische Internationale Rechenzentrum (PICC), sind übereingekommen, das Verzeichnis nach seiner Vervollständigung der Internationalen Organisation für Standardisierung (ISO) zur Verfügung zu stellen.

A. P. SPEISER

## Vereinigung Europäischer IBM-1620-Benutzer

Es wird die Gründung einer Vereinigung Europäischer IBM-1620-Benutzer geplant, nach dem Vorbild der 1620 Users Group in den USA. Die Hauptaufgabe einer solchen Vereinigung würde Meinungs- und Informationsaustausch der Benutzer und zukünftigen Benutzer des IBM-1620-Elektronenrechners sein. Interessenten werden gebeten, sich mit Herrn Ing. Dr. Hans Tompa, European Research Associates, 95 rue Gatti de Gamond, Brüssel 18, Belgien, in Verbindung zu setzen.

---

## Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

---

**Experimental Nuclear Physics.** Vol. III. Von E. SEGRÈ (John Wiley & Sons, Inc., New York 1959). 811 S., 276 Fig., \$ 23.—.

Les physiciens attendaient avec impatience le 3ème et dernier volume de la série *Experimental Nuclear Physics* éditée par E. SEGRÈ (John Wiley) et dont les volumes I et II ont paru il y a plus de cinq ans. C'est maintenant chose faite et 800 pages nous présentent les aspects expérimentaux et théoriques les plus récents des phénomènes de désintégration radioactive.

Le volume est divisé en cinq parties d'inégales longueurs. La première (partie VIII de la série), d'une cinquantaine de pages, est due à E. SEGRÈ et traite des caractéristiques générales du processus de désintégration. Bien que la matière en soit classique, l'adjonction de tables de standards radioactifs, le traitement détaillé des phénomènes de fluctuation et un aperçu des méthodes de mesure des périodes les plus courtes en fait un résumé utile et fort bienvenu.

La seconde partie (partie IX) rédigée par G.C. HANNA présente, en quelque 200 pages, un excellent exposé de la radioactivité  $\alpha$  sous tous ses aspects. C'est à notre connaissance le seul compte-rendu récent de ce domaine qui soit si complet et présenté d'une façon aussi systématique. Nous ne doutons pas qu'il sera apprécié des spécialistes comme il le mérite. Il discute d'abord les relations énergétiques puis le problème essentiel des facteurs gouvernant la vie moyenne en relation avec les différents modèles nucléaires, enfin il passe en revue les méthodes de détection et de spectroscopie  $\alpha$  pour se terminer par une table fort complète des émetteurs  $\alpha$  et de leurs caractéristiques.

M. DEUTSCH et O. KOFOED-HANSEN assument la lourde responsabilité de traiter dans les 3ème et 4ème parties les phénomènes d'émission  $\gamma$  (partie X) et de désintégration  $\beta$  (partie XI). C'est grâce à leur connaissance parfaite du sujet et à leurs contributions personnelles dans ce domaine qu'il leur est possible de présenter de façon quasiment exhaustive et up to date des domaines en aussi rapide évolution. C'est ainsi que la non conservation de la parité et ses conséquences ont pu être traitées de façon satisfaisante en dépit de leur intervention récente. Cependant l'effet MÖSSBAUER dont on connaît l'importance capitale pour la spectroscopie nucléaire à haute résolution est trop jeune en date pour avoir pu être pris en considération. Il semble bien que ce soit, de nos jours, le sort inévitable des traités qui se veulent complets d'être déjà dépassés dans l'une ou l'autre partie au moment même où ils paraissent.

Quoi qu'il en soit, le présent compte-rendu est d'une richesse et d'une clarté qui devraient satisfaire les plus exigeants.

La dernière partie (partie XII de la série) est consacrée aux accélérateurs de particules et a pour auteur E. M. McMILLAN. On comprend que les éditeurs aient désiré inclure dans leur ouvrage cet aspect dominant pour ne pas dire écrasant de la physique expérimentale moderne. L'énorme accumulation de types nouveaux et de techniques en développement a contraint l'auteur à un exposé de nature plutôt historique et descriptif en dépit de ses 150 pages, qui tranche avec le caractère précis et quantitatif des autres articles. Le lecteur en appréciera certainement l'ampleur et l'abondante illustration mais ne pourra se retenir de le considérer comme une adjonction un peu en marge de l'ouvrage.

Comme ses prédécesseurs, le volume III de *Experimental Nuclear Physics* bénéficie d'une présentation de haute qualité et d'une typographie parfaite. Nous sommes persuadés qu'il clôt dignement une série dont la valeur est indiscutable et qui rendra longtemps encore d'incalculables services à tous les physiciens, théoriciens comme expérimentateurs, engagés dans l'exploration du noyau.

J. ROSSEL

**Aufsätze und Vorträge über Physik und Erkenntnistheorie.** Von WOLFGANG PAULI. (Verlag Vieweg Sohn, Braunschweig 1961). 183 S., 7 Abb.; DM 19.80.

Dieses überaus gewichtige Buch von kaum 200 Seiten enthält 20 Aufsätze und Vorträge, die, bis auf eine Ausnahme, zwar alle schon früher, zum Teil in englischer Sprache, gedruckt vorlagen, aber erst in dieser Form einem breiteren Leserkreis zugänglich werden. Das Hauptziel der Veröffentlichung, die vom Verfasser noch selbst geplant war, lässt sich am besten durch ein Zitat aus dem Vortrag über *Die philosophische Bedeutung der Idee der Komplementarität* (S. 34 des Buches) beschreiben. Dort steht als einleitender Satz: «Die Veröffentlichung dieses Vortrages erfolgt in der Hoffnung, mit diesem kleinen Beitrag diejenigen grösseren Bestrebungen zu fördern, welche im allgemeinen das Ziel verfolgen, die verschiedenen Teildisziplinen, in welche unsere Geistigkeit auseinandergefallen ist, einander



wieder näher zu bringen.» Und wenig später: «(Aber) heute scheinen mir die Voraussetzungen für ein erneutes Einverständnis der Physiker und Philosophen über die erkenntnistheoretischen Grundlagen der wissenschaftlichen Naturbeschreibung erfüllt zu sein.»

Und nun folgt man mit anhaltender Spannung dem grossen Selbstgespräch<sup>1)</sup> des Verfassers, der wie kein anderer die tiefgreifenden Wandlungen der Physik in unserer Zeit bewusst und kritisch erlebt hat; über die ordnende Kraft der Idee der Komplementarität im physikalischen und in ausserphysikalischen Bereichen.

Als die grossen Gestalter der heutigen Wissenschaft treten NIELS BOHR, WERNER HEISENBERG, vor allem aber ALBERT EINSTEIN und in bemerkenswerter Weise C. G. JUNG auf. ARNOLD SOMMERFELD sind zwei Beiträge gewidmet und ein menschlich ergreifender Nachruf geht an PAUL EHRENFEST.

Besonders hervorzuheben ist an allen ursprünglich deutsch geschriebenen Beiträgen der hervorragende schöne sprachliche Ausdruck, der die Ausgewogenheit mit der vollkommenen Klarheit verbindet.

Eine besondere Stellung nimmt der letzte Aufsatz über die ältere und neuere Geschichte des Neutrinos ein. Er ist ganz der Physik gewidmet und beschreibt vor allem aktuelle Experimente über den  $\beta$ -Zerfall und daran anschliessende theoretische Überlegungen. Es war WOLFGANG PAULI zwei Jahre vor seinem Tode vergönnt, die endgültige Bestätigung des von ihm 25 Jahre zuvor postulierten Neutrinos und dessen Rolle bei der Paritätsverletzung noch zu erleben. Dieses Erlebnis ruft beim Referenten die Bemerkung Schopenhauers (Aphorismen zur Lebensweisheit, Kapitel IV über den Ruhm) in Erinnerung, welche lautet: «Im Alter giebt es keinen schöneren Trost, als dass man die ganze Kraft seiner Jugend *Werken* einverleibt hat, die nicht *mit*altern.»

Wir sind dankbar, in diesen Aufsätzen eine einzigartige Quelle zur Entwicklung der wichtigsten naturwissenschaftlichen Ideen der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts zu besitzen.

RES JOST

**Proceedings of the 10th Annual International Conference on High Energy Physics.** Rochester, 25. August bis 1. September 1960. Herausgegeben von E. C. G. SUDARSHAN, J. H. TINLOT und A. C. MELISSINOS (Interscience Publishers, New York 1960). 890 S., 621 Fig.; \$ 13.50.

Publier un volume de 890 pages, excellemment illustré et d'une typographie parfaite deux mois seulement après la conférence, constitue un tour de force qu'il convient de souligner.

Cet ouvrage constitue en quelque sorte une somme des connaissances actuelles sur les interactions des particules fondamentales aux hautes énergies. L'organisation de la matière reflète celle qui a prévalu lors de la conférence: quatre sessions *S* portant sur les aspects expérimentaux et théoriques de l'interaction forte des pions et nucléons et des particules étranges, ainsi que sur les interactions faibles, composent la première partie (pages 3 à 619) avec 130 contributions présentées à la conférence et une quarantaine d'articles destinés uniquement aux comptes-rendus. Il n'est pas possible dans une brève revue de citer les auteurs de ces communications parmi lesquels se trouvent les meilleurs spécialistes du moment.

La seconde partie (pages 623 à 753) qui englobe les quatre sessions *R* reprend les mêmes problèmes mais sous forme d'exposés d'ensemble présentés par des rapporteurs particulièrement qualifiés pour dégager clairement l'état actuel des expériences les plus relevantes de la théorie des interactions fortes et faibles, plus

<sup>1)</sup> Die dem Verfasser eigentümliche, eindruckliche Form des Vortrages war dem Selbstgespräch viel näher verwandt als der Auseinandersetzung mit einem Partner (dem Hörerkreis).

particulièrement sur la base du matériel communiqué dans les sessions *S* précédentes.

Les problèmes de la vie moyenne du pion neutres, de la photoproduction et de la diffusion  $\pi - p$  au voisinage des résonances supérieures ainsi que la conservation du spin isobarique, critère de l'indépendance de charges des forces nucléaires, sont résumés par J. ASKIN; en particulier l'expérience semble confirmer toujours mieux le dernier point. Une autre question importante est l'interaction  $\pi - \pi$  sur laquelle les expériences actuelles ne peuvent naturellement fournir que des indications indirectes et ont beaucoup de peine à apporter des précisions valables. G. C. WICK présente une courte revue de l'état actuel de l'application des théories de dispersion en insistant sur la complication intrinsèque de ces méthodes. Les données sur les phénomènes intervenant entre nucléons et antinucléons sont discutées par M. LÉVY dans leurs aspects généraux, et par K. SYMANZIK en ce qui concerne les procédés mathématiques utilisés pour l'analyse des processus d'interaction. La revue des données expérimentales sur l'interaction forte des particules étranges est assurée par M. SCHWARTZ et D. MILLER et celle des aspects théoriques par P. T. MATTHEWS. L'état actuel du problème des interactions faibles est présenté sous les trois aspects de leur intervention entre les particules normales (V. L. TELEGDI) entre les particules étranges (M. SCHWARTZ) et sous l'angle théorique (A. L. GOLDBERGER et L. B. OKUN). La difficulté de séparer proprement les interactions faibles et fortes et leurs relations très complexes sont particulièrement soulignées ainsi que le caractère encore très problématique du boson intermédiaire invoqué pour expliquer l'interaction faible.

La troisième et dernière partie du volume est consacrée au compte-rendu des 3 sessions *P* de la conférence. La session *P*<sub>1</sub> traite de la structure des particules «élémentaires» étudiée par diffusion cohérente des électrons de haute énergie (facteur de forme du proton et du neutron) par collision entre faisceaux d'électrons par des mesures de moments magnétiques et enfin par diffusion des muons de grande énergie (expérience du CERN). Il s'agit d'un ensemble de 13 communications.

La session *P*<sub>2</sub> (10 articles) présente de nouveaux résultats dans le domaine des énergies ultra-élevées, en particulier les travaux du CERN avec le synchrotron à proton de 25 GeV et des recherches par les rayons cosmiques (Moscou, Bristol, Chicago).

Une dizaine de communications consacrées à la théorie des particules élémentaires constitue la session *P*<sub>3</sub>; on y relève avec intérêt l'utilisation dans ce domaine également des concepts théoriques de la superconductivité montrant que leur efficacité ne s'étend pas seulement au domaine du solide et de la structure du noyau.

Tel qu'il nous est présenté le volume des Proceedings constitue un ouvrage de référence que tout physicien, même sans être spécialiste des hautes énergies, peut et doit consulter avec un très grand profit.

J. ROSSEL

**Statistics Manual.** Von L. CROW, A. DAVIS und W. MAXFIELD, Research Department, U. S. Naval Ordnance Test Station (Dover Publ. Inc., New York 1960). \$1.55.

In diesem Handbuch sind sämtliche heute bekannten statistischen Tests, die in der Forschung benutzt werden, sehr klar und übersichtlich zusammengestellt. Für jeden Text werden die entsprechenden Begriffe erklärt und seine Anwendung anhand von Beispielen gezeigt. Zahlreiche Tabellen und Diagramme erleichtern die Benutzung der Tests. Das Buch kann allen Wissenschaftlern, die Statistiken, Forschungsergebnisse usw. analysieren müssen, warm empfohlen werden.

W. SAXER



# Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik

Herausgegeben von Prof. Dr. PH. FRANK, Boston, und Prof. Dr. R. VON MISES, Cambridge/USA, unter Mitarbeit namhafter Wissenschaftler.

Nachdruck der 2., vermehrten Auflage. 1961. DIN A 5.

Leinen DM 66.—. Beide Bände werden nur geschlossen geliefert.

*Erster, mathematischer Teil:* XXIII, 916 Seiten mit 84 Abbildungen.

*Zweiter, physikalischer Teil:* XXIV, 1106 Seiten mit 110 Abbildungen.

Dieses von der Fachwelt seit langem erwartete Werk erscheint nunmehr als Nachdruck der zweiten, vermehrten Auflage zu einem äusserst niedrigen Preis. Der erste Band bringt in erster Linie eine Darstellung aller wesentlichen in der Physik benötigten mathematischen Methoden, während der zweite Band eine Beschreibung ihrer Anwendung auf die verschiedensten Probleme der Physik gibt.

## Messen und Rechnen in der Physik

Von Prof. Dr. U. STILLE, Braunschweig. 2., verbesserte und erweiterte Auflage. 19,5 × 27,5 cm. XII, 472 Seiten mit 6 Abbildungen, 55 Tabellen und 35 Tafeln. 1961. Leinen DM 78.—.

Die Neuauflage ist gegenüber der ersten wesentlich überarbeitet und erweitert. Dieses wird besonders deutlich im Kapitel «Ergänzungen». Das Literaturverzeichnis wurde von 950 auf 1350 Nummern erweitert, während das Sachregister jetzt 2000 gegenüber 1700 Anführungen enthält.

**Inhalt:** Einführung und Begriffsbestimmung / Mechanik / Wärme und Strahlung / Elektrizität und Magnetismus / Akustik und Phonetrie — optische Strahlung und Photometrie / Werte für Konstanten / **Ergänzungen:** Grössen und Grössenarten; Grössen gleicher Art und Grössen gleicher Dimension; Verhältnissgrössen und Verhältniseinheiten — Internationales Einheitensystem; «Metrisches System»; vereinheitlichtes *yard* und *pound* — Ebener und räumlicher Winkel als Verhältnissgrössen — Vom Prototypenmeter zum Wellenlängenmeter — Entwicklung der Zeitintervalleinheit Sekunde; Weltzeit, Ephemeridenzeit, «Atomzeit» — Träge und schwere Masse — Technische Krafteinheit — Die Druckeinheiten Bar und Torr — Neudefinition der internationalen Tafel-Kalorie und der British thermal unit; Bezugzustand der internationalen Dampftafeln — Temperatur und Temperaturskalen; Gold- und Platinpunkt; photometrisches Strahlungsäquivalent — Wandlungen des Molbegriffes; «Teilchenmenge» als Grundgrössenart und als Verhältnissgrösse — Zusammenführung der chemischen und der physikalischen Atomgewichtsskala zu einer vereinheitlichten relativen Atommassenskala / Tafeln.

Sonderprospekte bitten wir beim Verlag anzufordern.

**FRIEDR. VIEWEG & SOHN**  
**BRAUNSCHWEIG - Postfach 185**

IN STACKS

## Clichés Schwitter AG

Basel  
Allschwilerstrasse 90  
Telefon 061 38 88 50

Zürich  
Stauffacherstrasse 45  
Telefon 051 25 67 35

Bureau Lausanne  
Avenue de la Gare 44  
Telefon 021 22 86 75

